

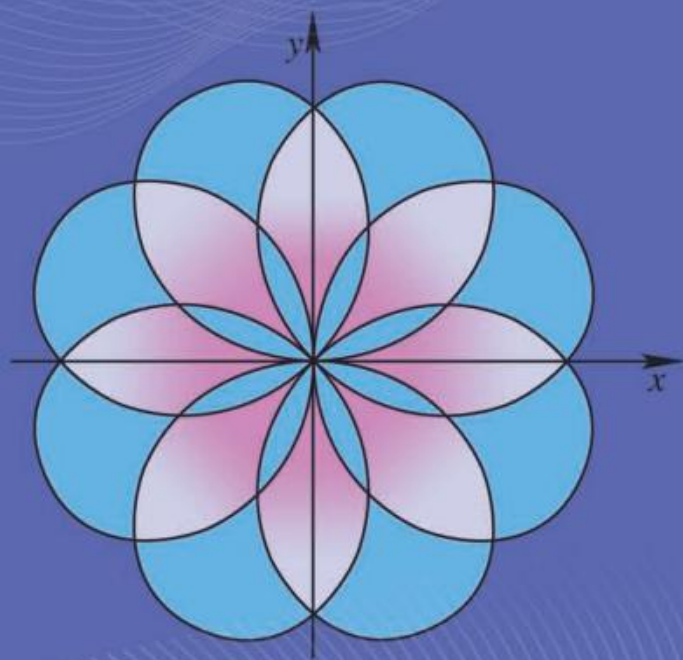
经全国中小学教材审定委员会 2005 年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-4

坐标系与参数方程



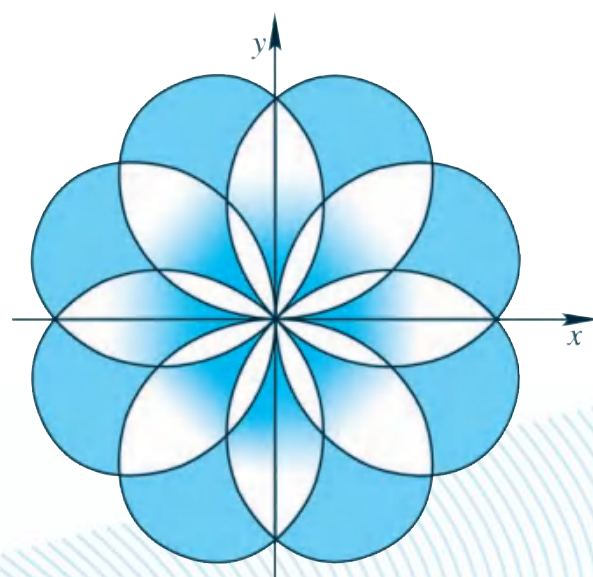
湖南教育出版社

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4

坐标系与参数方程



主 编 张景中 黄楚芳

执行主编 李尚志

本册主编 王树禾

编 委 郑志明 查建国

蒋星耀

坐标系种种和美丽曲线的数学描述

大自然恩赐我们众多漂亮的图形，人类在生活、生产与科学研究当中又创造了不少美妙的曲线；17世纪以前，数学家们梦寐以求用代数的方法来描述与定量研讨形形色色的曲线。人真不愧为万物之灵，我们的前人如笛卡儿、费马等杰出数学家，创立解析几何，建立平面与空间的直角坐标系，使得几何学代数化的理想得以实现。坐标系是现代数学活动的舞台，但有的曲线在直角坐标系中不便于解析表达，另类坐标系应运而生，主要有(平面)极坐标系和(空间)柱坐标系与球坐标系。对于给定的几何对象，选择适合于它的坐标系是至关重要的事，选得不好，会使研究工作别扭繁琐；选得好，则使研究工作简洁顺利。

我们已经知道，在直角坐标系当中，用有序的两个实数表示平面上点的位置，用有序的三个实数表示空间点的位置，进而有平面曲线的方程和空间曲线的方程。

除平面直角坐标系与空间直角坐标系之外，是否还有其他坐标系呢？有。本书重点讲授极坐标系，也讲到空间的柱坐标系和球坐标系。采用不同几何意义的参照物，可以建立各种坐标系；不同的坐标系有各自的优缺点，极坐标可以把一些曲线表达得十分简洁，给某些曲线的表达与研究带来诸多方便。

有些平面曲线的方程可以在平面直角坐标系中写成动点的纵坐标 y 是动点横坐标 x 的函数或称曲线的普通方程。但也存在大量的美丽而有用的曲线，它们的方程不便于甚至不可能写成普通方程，可以通过一种叫作参数的中介而写成方程组，如果把这种参数记成 t ，则曲线的方程组形如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

这种方程组就是曲线的参数方程.

参数方程是描述曲线的重要工具之一, 参数方程描写曲线有许多方便之处, 我们将采用参数方程来讨论许多有用又有趣的重要曲线.

本课程的重点是极坐标和曲线的参数方程.

通过本课程的学习, 不仅使我们尽情感受数学的艺术性, 欣赏那些奇妙的曲线及其方程, 而且还会强化我们在实践中应用数学的意识和解决问题的能力. 希望同学们从各种坐标系与参数方程的建立当中领会发散思维与创新思维的重要性, 提高数形结合的观念和技巧, 在数学园地上, 不仅是欣赏者, 而且努力使自己成为耕耘者和收获者.

目 录

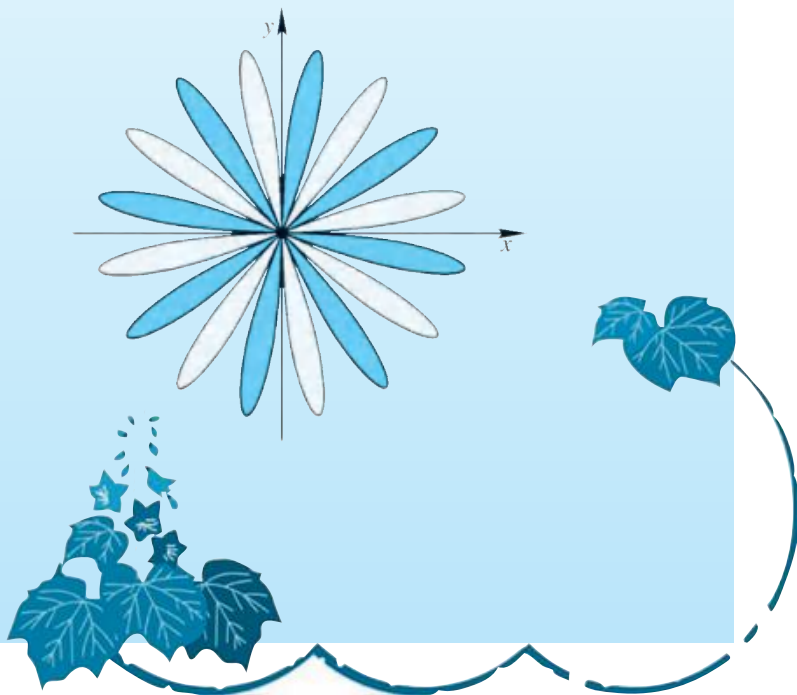
第1章 坐标系	1
1.1 坐标系的作用	2
1.2 平面直角坐标系中的伸缩变换	4
1.3 极坐标系	8
1.4 极坐标与平面直角坐标的互化	11
阅读与思考 一些重要平面曲线的极坐标方程	15
1.5 柱坐标系	19
1.6 球坐标系	20
习题 1	24
数学文化 数学家阿基米德和他的螺线	26
第2章 参数方程	29
2.1 从抛物运动谈起	30
2.2 直线的参数方程	33
2.3 圆锥曲线的参数方程	35
2.4 平摆线及其参数方程	38
2.5 渐开线及其参数方程	39
习题 2	41
阅读与思考 美丽曲线种种	43
数学实验 用计算机和教具绘制展现各种曲线	54
数学文化 数学家卡丹和帕斯卡	62
课程总结报告参考题	65
附 录 数学词汇中英文对照表	66

第 1 章

坐标系

笛卡儿企图通过坐标系给几何引进新方法，他的成就远远超出他的期望。坐标系是数学中的双刃剑，使得几何的目的可以通过代数达到，反过来，给代数以几何解释。坐标系使代数同几何结成伴侣，它们互相吸取新鲜的活力，以快速的步伐走向完善。

——拉格朗日



如何刻画一个图形的位置和形状是几何学的重要内容.

1.1 坐标系的作用

在广袤无垠的平面上, 你可以把圆规张开, 使其两脚相距 10 cm, 画一个圆. 但若问这个圆在哪里, 你可以指着它说就在这里, “这里” 是哪里呢? 很不精确. 如果我们在此平面上取定以圆规固定的一脚为原点的 **平面直角坐标系** (flat square coordinate system), 则可用方程

$$x^2 + y^2 = 100 \quad ①$$

精确地代数地表达出它是一个圆心在坐标原点, 半径为 10 cm 的圆, 见图 1-1.

有了坐标系, 不仅使几何图形的位置得以精确描绘, 而且可以使曲线的形象用代数方程来表达.

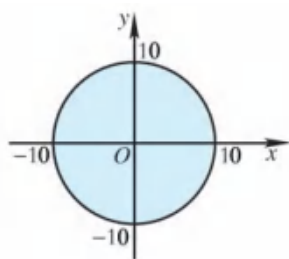


图 1-1

有了坐标系, 我们可以把单位圆内的点组成的集合 D_1 简洁地写成

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\};$$

把由半径为 1 与 2 的两个圆心在原点的同心圆围成的环形内部的点组成的点集 D_2 简洁地写成

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

有了坐标系, 才能写出曲线等几何图形的代数表达式, 进而通过对这个代数方程的研究, 得出该曲线的几何性质. 例如我们写一个方程

$$y = x^2 + 4x + 5, \quad ②$$

正因为有了坐标系, 我们说这个方程②代表一条抛物线 (见图 1-2),

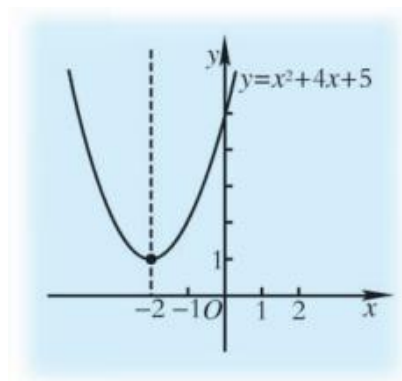


图 1-2

而且，由代数的恒等变形得

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + 5 \\ &= (x+2)^2 + 1, \end{aligned}$$

从而知 $x_0 = -2$ 时， y 最小，最小值是 $y_0 = 1$ ，即此抛物线最低点在 $(-2, 1)$ ，对称轴为 $x = -2$ ，抛物线开口向上等几何性质。上述几何性质，是有了坐标系之后，借助代数的方法得到的，反过来，这种在坐标系中代数地对几何的研究，又反馈给代数，使我们凭借图 1-2 这种坐标系中的图象与 x 轴无交点，推断方程

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

无实数根等代数结论。

坐标系是刻画点的位置与其变化的参照物。我们知道，一条直线上的点的位置可以用一个实数来标志，例如在 x 轴上，我们容易指出 $x=1$ 这个点在何处；在平面上的点的位置要用两个有序实数 α, β 组成的有序数组 (α, β) 来确定；空间中的点则需用三个有序实数 α, β, γ 组成的有序数组 (α, β, γ) 来确定。

例如问一架直升机的位置现在在哪里，我们发现它在东经 120° ，北纬 45° ，距地面 1 000 m，可以用三个数组成的有序数组 $(\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{4}, 1\,000)$ 把直升飞机的位置确定。

又例如问你家吊在天花板上的灯泡位置在哪里，我们测出它距地板 2 m，距东墙 2 m，距南墙 2.5 m，约定用有序三数组 $(2.5, 2, 2)$ 来标志灯的位置，以地板上的东南角 O 为原点，向北为 x 轴

有了坐标系，实现了几何代数化和代数几何化，使代数与几何双双受益。

$y = \sin x$ 平行于 x 轴压缩或拉伸后, 振幅不变, 但其周期会发生变化.

伸缩变换是 xOy 平面到自身的一一对应的映射, 把 xOy 平面上的每个点 (x, y) 变成与之对应的点 (x', y') .

正向, 向西为 y 轴正向, 向上为 z 轴正向, 则建立了空间直角坐标系 $Oxyz$; 空间中的点 (例如吊灯) 与有序数组 (x, y, z) 一一对应, 例如上面的吊灯位置为 $(x, y, z) = (2.5, 2, 2)$, $(2.5, 2, 2)$ 就是吊灯的坐标.

有了坐标系, 才使代数与几何学相结合, 使这两门重要学科都受益, 从而双双获得长足进步, 创造了解析几何等现代几何学; 有了坐标系才能通过解析表达式深入研究函数, 进而促进了微积分等现代数学的创生与发展.

我们必须掌握各种坐标系对点的位置的表述规则, 进而科学地研究各种曲线等几何对象的数学性质, 通过坐标系中函数图象直观地与数学地分析, 得出各种函数的重要性质.

1.2 平面直角坐标系中的伸缩变换

伸缩变换我们其实已经不止一次地遇到过, 例如 $y = \sin 2x$ 的图象就是把 $y = \sin x$ 的图象平行于 x 轴压缩成原来的一半形成的, 见图 1-3.

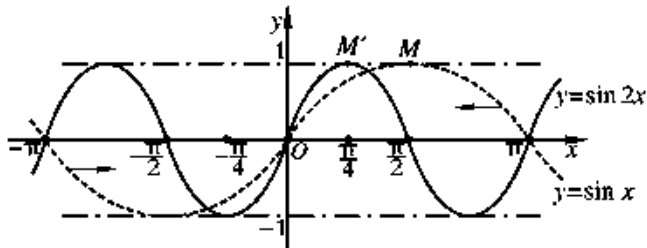


图 1-3

其中实线是 $y = \sin 2x$ 的图象, 虚线是 $y = \sin x$ 的图象.

曲线 $y = \sin 2x$ 上的任意一点 $M'(x', y')$, 都是曲线 $y = \sin x$ 上唯一的一个相应的点 $M(x, y)$ 沿 x 轴平移变成的, x', y' 与 x, y 之间满足关系式

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = y. \end{cases} \quad ①$$

例如 $y = \sin 2x$ 上的点 $M'(\frac{\pi}{4}, 1)$ 是 $y = \sin x$ 上的点 $M(\frac{\pi}{2}, 1)$ 变换而成的.

考虑函数 $y = 2\sin x$, 它的图象则是由 $y = \sin x$ 的图象平行于 y 轴拉伸 2 倍变成的, 见图 1-4.

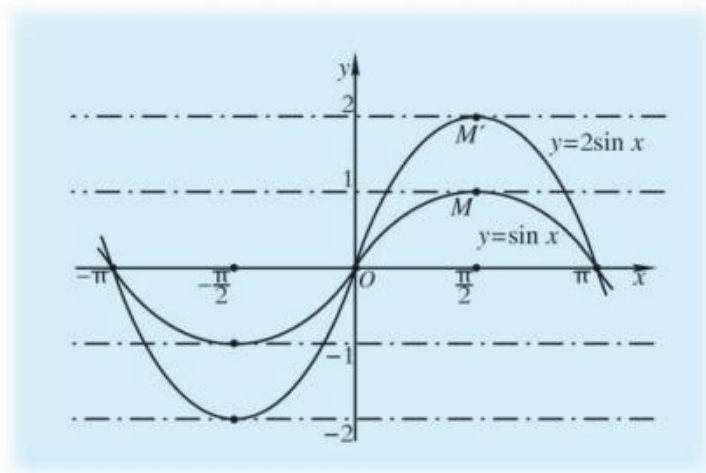


图 1-4

曲线 $y = 2\sin x$ 上的任意一点 $M'(x', y')$ 都是曲线 $y = \sin x$ 上唯一的一个相应的点 $M(x, y)$ 沿 y 轴平移变成的, x', y' 与 x, y 之间满足关系式

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y. \end{cases} \quad (2)$$

一般地, 变换公式

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \quad (k > 0), \end{cases} \quad (3)$$

把 xOy 平面上的点 (x, y) 变换成 xOy 平面上的一点 (x', y') , 这种变换称为平行于 y 轴的**伸缩变换** (lengthen and shorten alternate). 当 $k > 1$ 时是拉伸过程, $0 < k < 1$ 时是压缩过程, 所以名符其实称为伸缩变换.

相似地, 变换公式

$$\begin{cases} x' = lx \quad (l > 0), \\ y' = y, \end{cases} \quad (4)$$

$y = \sin x$ 平行于 y 轴拉伸或压缩后, 其周期不变, 但振幅会发生变化.

有时称伸缩变换为“压缩变换”，把拉伸视为广义的压缩. ③也称为向着 x 轴压缩变换，④也称为向着 y 轴的压缩变换.

伸缩变换把平行直线变成平行直线.

把 xOy 平面上的点 (x, y) 变换成 xOy 平面上的一点 (x', y') ，这种变换称为平行于 x 轴的伸缩变换，当 $l > 1$ 时是拉伸过程， $0 < l < 1$ 时是压缩过程.

在伸缩变换过程中，原点是不动点，即原点 $(0, 0)$ 变成原点 $(0, 0)$ ；当 $k=1, l=1$ 时，公式③与④表达的伸缩变换下每点都是不动点，即每点变成自身；除此之外，即 $k \neq 1$ ，或 $l \neq 1$ 时，除原点外，每点都移动了位置，图形发生了伸缩.

伸缩变换③把直线变成直线，事实上，设已知直线

$$y = k_0 x + b$$

在变换③之下，此直线变成直线

$$\frac{1}{k} y' = k_0 x' + b, \quad y' = k k_0 x' + b k.$$

截距与斜率都扩大了 k 倍. 同理伸缩变换④把直线变成直线.

例 1 已知正方形 $ABCD$ ， A, B, C, D 的坐标分别是 $(2, 2)$ ， $(-2, 2)$ ， $(-2, -2)$ ， $(2, -2)$ ，问在伸缩变换 $\begin{cases} x' = x, \\ y' = \frac{1}{2} y \end{cases}$ 与

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} x, \\ y' = y \end{cases}$ 的作用下，正方形 $ABCD$ 分别变成什么图形？

解 按变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \frac{1}{2} y \end{cases}$$

计算， $A(x, y) = (2, 2)$ 变成 $A'(x', y') = (2, 1)$ ， $B(x, y) = (-2, 2)$ 变成 $B'(x', y') = (-2, 1)$ ， $C(x, y) = (-2, -2)$ 变成 $C'(x', y') = (-2, -1)$ ， $D(x, y) = (2, -2)$ 变成 $D'(x', y') = (2, -1)$ ，由于直线变成直线，正方形 $ABCD$ 变成矩形 $A'B'C'D'$ ，见图 1-5.

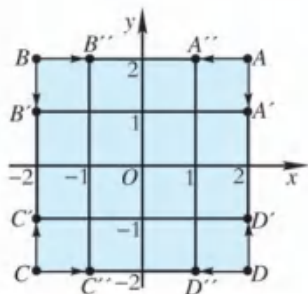


图 1-5

同理，在变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = y \end{cases}$$

作用下，正方形 $ABCD$ 变成矩形 $A''B''C''D''$ 。见图 1-5。所得图形是正方形“压扁”了一半形成的，面积是原来正方形的一半。

例 2 在伸缩变换

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = y \end{cases}$$

与伸缩变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y \end{cases}$$

作用下，单位圆变成什么图形？

解 在伸缩变换 $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = y \end{cases}$ 的作用下，单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 变成

$$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2 + (y')^2 = 1,$$

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

变成的图形是长半轴为 2，短半轴为

1 的椭圆，见图 1-6。

在伸缩变换 $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y \end{cases}$ 的作用下，单位圆变成椭圆

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

见图 1-7。

因为伸缩变换把直线变成直线，所以伸缩变换把多边形变成边数一致的多边形；伸缩变换不能实现曲线段与直线段的互变，例如它不能把圆变成正方形。

伸缩变换把圆变成圆或椭圆。

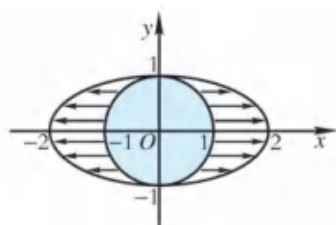


图 1-6

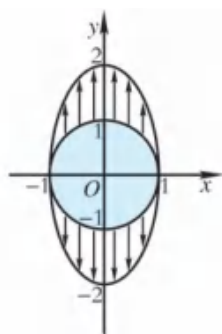


图 1-7

由于伸缩变换是可逆的，其逆变换也是伸缩变换，所以伸缩变换把椭圆变成圆或椭圆。

1.3 极坐标系

为确定平面上点的位置，平面直角坐标系不是唯一的平面坐标系，有时，用一种叫作**极坐标**（polar coordinate）的平面坐标来描述点的位置和某种轨迹更为方便．例如甲问乙：张庄在哪里？乙答：在从我们站的这里向东北 5 km 的地方．乙回答的就是张庄的极坐标．

在平面内取一定点 O ， O 点叫作极点；从 O 起引一条射线 Ox ，这条从极点起的射线 Ox 叫作极轴；选定长度单位（例如 km），再选定角度的正方向（逆时针转角为正向），这种取定了极点、极轴、长度单位与角度正向的坐标系叫作极坐标系．对于平面上的一个点 M ，连接极点 O 与 M ，线段 OM 之长 ρ 叫作 M 点的极径（或矢径、或向径），极轴 Ox 为始边按逆时针转到 OM 的角 θ 叫作 M 点的极角，有序数对 (ρ, θ) 叫作 M 点的极坐标．例如上面的张庄其极坐标为 $(5, \frac{\pi}{4})$ ，见图 1-8．

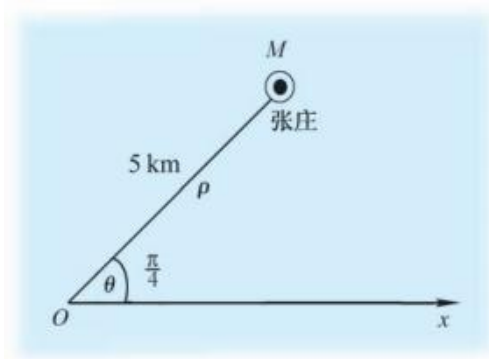


图 1-8

当 M 在极点 O 时，它的极径 $\rho=0$ ，极角 θ 可以取任何实数．

在极坐标中，若无特殊声明， ρ 是非负实数， $\rho \in [0, +\infty)$ ， $\theta \in (-\infty, +\infty)$ ．

当 $\rho > 0$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$ 时，平面上的点与极坐标一一对应．

极坐标有诸多长处,下面我们会重点来讨论,但它也有它的缺点,例如它并不像平面直角坐标系那样,能建立与平面上的点的一一对应.事实上,对给定的 ρ 与 θ ,由极坐标 (ρ, θ) 可以唯一地确定一个点 M ,但是反过来,平面上给定一点,却可以写出这个点的无数多个极坐标.根据点的极坐标 (ρ, θ) 的定义,对于给定的点,它的极径 ρ 是唯一确定的,但极角却可以有无穷多种,如果我们写出了它的极坐标 (ρ, θ) ,则 $(\rho, \theta+2n\pi)$ 也是这个点的极坐标,其中 n 是任意整数.当 $n>0$ 时, $\theta+2n\pi$ 表示从该点起绕极点 O 逆时针转动了 n 圈又回到原处, $n<0$ 时, $\theta+2n\pi$ 表示从该点起绕极点 O 顺时针转动了 n 圈又回到原处.

在极坐标系中,许多曲线的方程变得十分简洁,而且几何形象也表达得十分明确.所谓曲线 L 的极坐标方程是指 L 上的动点的极坐标的极径与极角满足的方程 $\rho=f(\theta)$ 或 $F(\rho, \theta)=0$.

(1) 过极点直线的极坐标方程.

在平面直角坐标系中,当直线斜率存在时,过原点 O 的直线方程形如

$$y=kx,$$

其中 k 是实数,叫作斜率. $k=\tan \theta$, θ 是此直线与 Ox 轴的夹角,这个角是多大,一般从 k 上不易看出来,需要计算 $\arctan k$.但在极坐标中,我们取 Ox 轴正半轴为极轴,则过极点 O 的射线方程写成

$$\theta=\theta_0 \quad (\theta_0 \in [0, 2\pi)).$$

如果我们允许极径取负值,约定 $M(\rho, \theta)$ 关于极点对称点 M' 的极坐标写成 $M'(-\rho, \theta)$.于是过原点与 x 轴夹角为 θ_0 的直线 l 的极坐标方程为

$$l: \theta=\theta_0. \quad \textcircled{1}$$

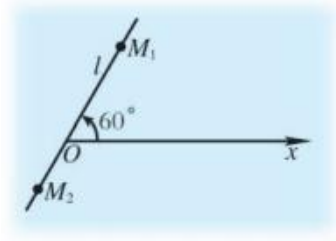


图 1-9

一些环绕一点旋转的点的轨迹用极坐标方程来表示一般会比较简便.

方程 $\rho=r_0$ 的含义是动点的向径恒为 r_0 ，是个常数；而方程中 $\rho=r_0$ 无极角 θ ，表示 θ 可以任意变化，当向径 ρ 是常数，极角任意时，即动点保持与 O 点等距地转动，这正是圆规在画圆。

如图 1-9 中与 x 轴夹角为 $60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 过原点的直线的极坐标方程为

$$\theta=\frac{\pi}{3}.$$

(2) 圆心在极点的圆的极坐标方程是

$$\rho=r_0, \quad (2)$$

其中 r_0 是圆的半径.

(3) 圆心在极轴，过极点的圆的极坐标方程.

在图 1-10 中画的是过极点，其中心在极轴的圆，设其半径为 r_0 .

设此圆上任取的一点 M 的极坐标为 (ρ, θ) ，由于 OA 是直径，所以 $\angle OMA = 90^\circ$ ，于是

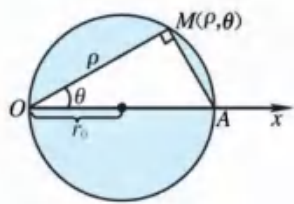


图 1-10

$$\frac{OM}{OA} = \cos \theta, \quad \frac{\rho}{2r_0} = \cos \theta.$$

从而得 ρ 与 θ 满足的方程为

$$\rho = 2r_0 \cos \theta. \quad (3)$$

方程③即(3)中所说圆的极坐标方程.

(4) 阿基米德螺线的极坐标方程.

一个动点 M 随时间的增加绕定点 O 逆(或顺)时针匀速绕动，同时离 O 点越来越远，它远离 O 点的直线距离也是匀速增长的. 如果把 O 点定为极坐标的极点， M 与 O 点的直线距离就是向径 ρ ，转角就是极角 θ ，由于 ρ 与 θ 的增大都是匀速的，设 ρ 的增速为 v ， θ 的转速为 ω ，因为 ρ 的增加与 θ 的增加所用的时间是一致的，设开始时，动点在极点，则时间 t 为

$$t = \frac{\rho}{v} = \frac{\theta}{\omega} \quad (v, \omega \neq 0),$$

$$\rho = \frac{v}{\omega} \theta.$$

一般地，将上式写成

$$\rho = \alpha \theta \quad (\alpha \neq 0). \quad (4)$$

④是上述动点所描曲线的极坐标方程，见图 1-11.

图 1-11 画的是 $\alpha > 0$ 的情形, 如果 $\alpha < 0$, 则绕动按顺时针进行, $\alpha > 0$ 与 $\alpha < 0$ 的图象关于 y 轴对称.

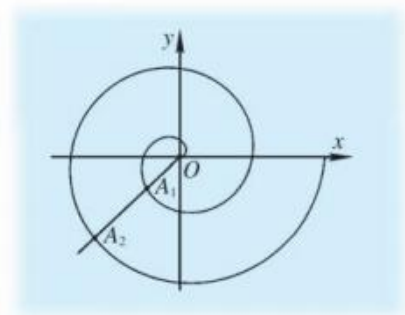


图 1-11, $\rho = \frac{\theta}{3}$

④式表达的曲线叫作阿基米德螺线 (spiral curve), 由于它向径的扩张与转角的变化皆为等速的, 所以也称其为等速螺线.

利用等速螺线的性质, 可以制成把匀速转动转化成匀速直线运动的机械凸轮装置, 见图 1-12. 图中曲线 $\widehat{ACB}$ 与 $\widehat{ADB}$ 是对称的, 都是等速螺线上的一段曲线, 分别对应 $\alpha > 0$ 与 $\alpha < 0$, 凸轮由 A 经 C 匀角速转到 B 时, 从动杆匀速上推, 继而匀速下降, 往复运动不已. 其中 O 是极点, L 是此机构的传动轴.

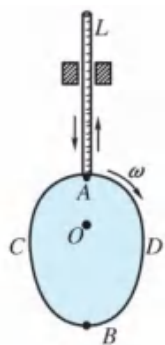


图 1-12

从阿基米德螺线的极坐标方程中, 你感受到极坐标的长处了吗? (关于阿基米德和他的螺线, 请参看本章结尾的数学文化.)

1.4 极坐标与平面直角坐标的互化

在平面上的同一个点, 它的平面直角坐标 (x, y) 与极坐标 (ρ, θ) 之间有什么样的换算公式? 同一条曲线, 它在平面直角坐标系中的方程为 $y=f(x)$ 或 $F(x, y)=0$, 在极坐标系中的方程为 $\rho=\varphi(\theta)$, 如果知道其中它的一种方程, 如何换算出另一种方程呢?

我们把极轴与平面直角坐标系 xOy 的 x 正半轴重合, 且两种坐标系取相同的长度单位, 设 $P(x, y)$ 是平面上的任一点, 见图 1-13. 则

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad ①$$

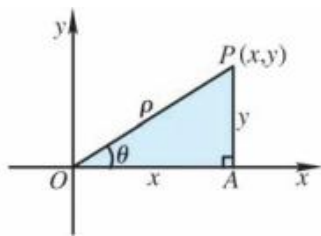


图 1-13

从①可得

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \end{cases} \quad ②$$

①与②是平面直角坐标系与极坐标系中同一点的直角坐标 (x, y) 与其极坐标 (ρ, θ) 之间的换算公式.

用坐标间的换算公式①与②, 可以对同一曲线的平面直角坐标系中的方程与极坐标系中的方程进行互化.

例 1 在平面直角坐标系中, 把曲线的方程 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 化成极坐标系中的方程.

解 把 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ ($\rho \neq 0$) 代入方程 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 得

$$(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 - 2a\rho \cos \theta = 0,$$

$$\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2a\rho \cos \theta = 0,$$

$$\rho - 2a \cos \theta = 0,$$

$$\rho = 2a \cos \theta. \quad ③$$

方程③我们在前面得出过, 它是圆心在极轴上, 半径为 a , 过极点的圆的极坐标方程. 事实上由 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 得

$$(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = a^2,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2. \quad ④$$

容易看出, ④恰为中心在 $(a, 0)$, 半径为 a 的圆在平面直角坐标系中的方程, 此圆过极点, 圆心在极轴上.

从例 1 我们看到, 通过公式①可以把曲线的直角坐标方程化成极坐标方程.

例 2 已知曲线的极坐标方程 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$, 求此曲线的直角坐

标方程, 其中 e 与 p 是正的常数.

解 方程 $\rho = \frac{ep}{1-e \cos \theta}$ 写成

$$\rho = e\rho \cos \theta + ep. \quad (5)$$

把 $x = \rho \cos \theta$ 与 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入⑤, 得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + p).$$

两端平方得

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^2(x^2 + 2px + p^2) = e^2x^2 + 2pe^2x + e^2p^2, \\ (1-e^2)x^2 + y^2 - 2pe^2x - e^2p^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

⑥即此曲线的直角坐标方程.

下面对 e 的不同取值方程⑥表示何种曲线进行分析.

(1) $0 < e < 1$ 时, $1 - e^2 > 0$, 由⑥得

$$\begin{aligned} 0 &= (1-e^2)x^2 + y^2 - 2pe^2x - e^2p^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{1-e^2}y^2 - \frac{2pe^2}{1-e^2}x - \frac{e^2p^2}{1-e^2} \\ &= \left[x^2 - \frac{2pe^2}{1-e^2}x + \left(\frac{pe^2}{1-e^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{1-e^2}y^2 - \left[\left(\frac{pe^2}{1-e^2} \right)^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2} \right] \\ &= \left(x - \frac{pe^2}{1-e^2} \right)^2 + \frac{1}{1-e^2}y^2 - \left[\left(\frac{pe^2}{1-e^2} \right)^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{pe^2}{1-e^2} = \alpha > 0, \left(\frac{pe^2}{1-e^2} \right)^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2} = \beta^2 > 0, 1-e^2 = \gamma^2 > 0,$$

于是

$$\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2\gamma^2} = 1.$$

即 $0 < e < 1$ 时, ⑥式表示一个椭圆.

(2) $e = 1$ 时, $1 - e^2 = 0$, 由⑥得

$$y^2 - 2px - p^2 = 0,$$

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

即 $e = 1$ 时, ⑥式表示一条抛物线.

(3) $e > 1$ 时, $e^2 - 1 > 0$, 于是由⑥得

$$0 = -(e^2 - 1)x^2 + y^2 - 2pe^2x - e^2p^2$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 - \frac{1}{e^2-1}y^2 + \frac{2pe^2}{e^2-1}x + \frac{e^2p^2}{e^2-1} \\
&= \left[x^2 + \frac{2pe^2}{e^2-1}x + \left(\frac{pe^2}{e^2-1} \right)^2 \right] - \frac{y^2}{e^2-1} + \frac{e^2p^2}{e^2-1} - \left(\frac{pe^2}{e^2-1} \right)^2 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{pe^2}{e^2-1} \right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \left(\frac{pe^2}{e^2-1} \right)^2 - \frac{e^2p^2}{e^2-1} = \frac{p^2e^2}{e^2-1} \left(\frac{e^2}{e^2-1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

其中 $\frac{p^2e^2}{e^2-1} \left(\frac{e^2}{e^2-1} - 1 \right) > 0$.

令 $\frac{pe^2}{e^2-1} = \alpha$, $\frac{p^2e^2}{e^2-1} \left(\frac{e^2}{e^2-1} - 1 \right) = \beta^2$, 则得

$$\frac{(x+\alpha)^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\beta^2(e^2-1)} = 1,$$

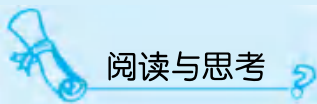
$$\frac{(x+\alpha)^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\delta^2} = 1.$$

其中 $\delta^2 = \beta^2(e^2-1)$. 这时方程⑥表示双曲线.

由上述分析可知, 极坐标方程

$$p = \frac{ep}{1-e \cos \theta} \quad (e > 0, p > 0)$$

是椭圆、抛物线与双曲线这三种圆锥曲线的统一的极坐标方程.



阅读与思考

一些重要平面曲线的极坐标方程

1. 对数螺线.

满足极坐标方程

$$\rho = ae^{k\theta} \quad (ak \neq 0)$$

的平面曲线叫作对数螺线, 其图象如图 1-14 所示.

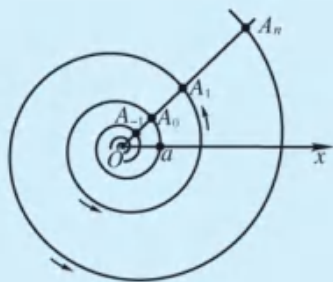


图 1-14

对数螺线的最重要的性质是所谓“等比性”: 从极点出发的任一射线 OA 与对数螺线的交点列 (从 O 点向外排列, 动点的出发点为 $(\rho, \theta) = (a, 0)$)

$$\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$$

则线段长序列

$$\dots, OA_{-2}, OA_{-1}, OA_0, OA_1, OA_2, \dots \quad \textcircled{1}$$

是以 $e^{2k\pi}$ 为公比的等比数列.

事实上, 任取整数 n , 则

$$OA_n = ae^{k(\alpha + 2n\pi)}, \quad OA_{n+1} = ae^{k(\alpha + 2(n+1)\pi)},$$

其中 α 是射线 OA 与极轴的夹角, 于是

$$\frac{OA_{n+1}}{OA_n} = \frac{ae^{k(\alpha + 2(n+1)\pi)}}{ae^{k(\alpha + 2n\pi)}} = e^{2k\pi}.$$

即 $e^{2k\pi}$ 是序列①的公比.

沿此螺线顺时针转动时, 趋于极点 O .

2. 玫瑰线 (rose curve).

(1) 玫瑰线 $\rho = a \sin 2\theta$ 的图象如图 1-15 所示.

考虑 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 这时对任取的 $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 可以由 $\rho = a \sin 2\theta$

正是运用了极坐标方程, 才能简捷地得出对数螺线的几何性质.

玫瑰线的极坐标方程提供了分析绘画玫瑰线的极大方便.

算出 $\rho_0 = a \sin 2\theta_0 \in [0, a]$, 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ 时, $\rho_0 = a \sin \frac{\pi}{2} = a$, $\rho_0 = a$ 是 ρ 的最大值. 又因 $\rho = a \sin 2\theta$ 的值在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是关于 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 中点 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 对称的, 如图 1-16, $\rho(0) = \rho(\frac{\pi}{2}) = 0$. 所以在第一象限玫瑰线 $\rho = a \sin 2\theta$ 的第一瓣是关于 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 这一射线对称的图形, 且与 x, y 轴相切于 O 点.

考虑 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\rho(\frac{\pi}{2}) = a \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$, $\rho(\pi) = a \sin 2\pi = 0$, 当 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\rho(\theta) = a \sin 2\theta < 0$.

按我们前面关于极坐标的规定, 当 $\rho < 0$ 时, 以 (ρ, θ) 为极坐标的点 $M(\rho, \theta)$ 的位置应如下确定: 设 P 点的极坐标为 $(|\rho|, \theta)$, 作射线 OP , 使得 $\angle xOP = \theta$, 在 OP 的反向延长线上取一点 M , 使得 $|OM| = |\rho|$.

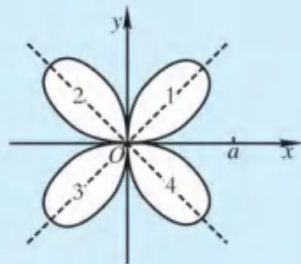
由上述规定, 我们对 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 可画出与第一瓣全等的第四个花瓣.

再由 $\sin 2\theta$ 的周期是 π , 第一瓣旋转 π 得第三瓣, 第四瓣旋转 π 得第二瓣. 于是画出图 1-15.

(2) 玫瑰线 $\rho = a \cos 2\theta$ 的图象如图 1-17 所示.

(3) 玫瑰线 $\rho = a \sin 3\theta$ 的图象如图 1-18 所示.

(4) 玫瑰线 $\rho = a \cos 3\theta$ 的图象如图 1-19 所示.



$$\rho = a \sin 2\theta$$

图 1-15

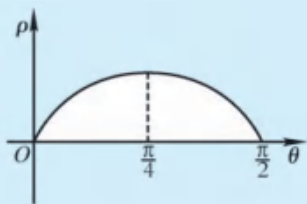
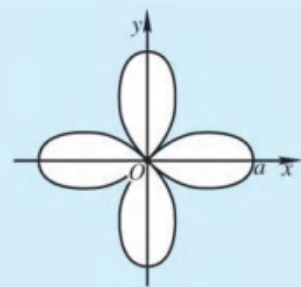
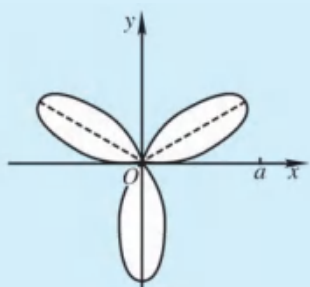


图 1-16



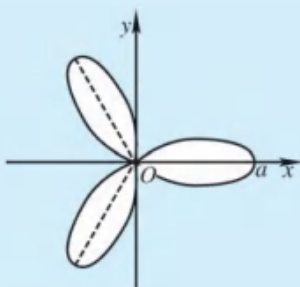
$$\rho = a \cos 2\theta$$

图 1-17



$$\rho = a \sin 3\theta$$

图 1-18

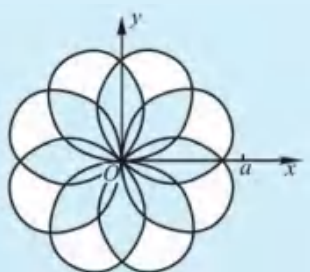


$$\rho = a \cos 3\theta$$

图 1-19

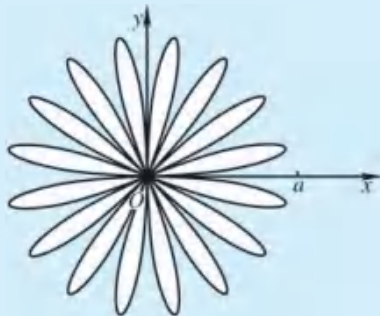
(5) 玫瑰线 $\rho = a \sin \frac{4}{3}\theta$ 的图象如图 1-20 所示.

(6) 玫瑰线 $\rho = a \sin 8\theta$ 的图象如图 1-21 所示.



$$\rho = a \sin \frac{4}{3}\theta$$

图 1-20



$$\rho = a \sin 8\theta$$

图 1-21

3. 心脏线.

极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 表示的曲线叫作心脏线, 图 1-22.

考虑直径为 a 的圆, 此圆过极点 O , 一条直径在 Ox 轴上, 点 P 在此圆周上, 则 $OP = a \cos \theta$, 动点 M 的向径 $|OM| = a(1 + \cos \theta) = a + a \cos \theta = a + |OP|$, 可见所谓心脏线, 是满足 $|OM| = |OP| + a$ 的动点的轨迹.

从方程 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 分析, 心脏线上点的向径的最大值是 $2a$, 最小值是 0 . 由于 $\cos \theta$ 是偶函数, 即 $\cos \theta = \cos(-\theta)$, 所以心脏线

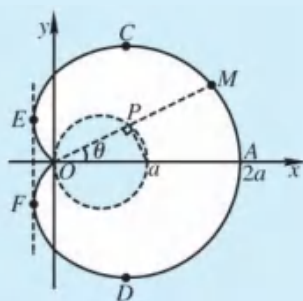


图 1-22

熟悉的正弦函数或余弦函数在极坐标中起着举足轻重的作用; 美丽复杂的玫瑰线们在极坐标系中的方程只是简单的正弦或余弦函数式 $\rho = a \sin k\theta$ 或 $\rho = a \cos k\theta$.

关于 Ox 轴对称.

4. 双纽线.

极坐标方程 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 表示的曲线叫作双纽线, 其中常数 $a > 0$. 如图 1-23 所示. 由于 $\rho^2 \geq 0$, 所以 $\cos 2\theta \geq 0$, 可见双纽线夹在 $y = \pm x$ 两条直线所形成的对顶角内, 关于 Ox 轴对称. 由于 $\rho = \pm\sqrt{2}a \cdot \sqrt{\cos 2\theta}$, 所以双纽线上点的向径可取负值, 由我们对 $(-|\rho|, \theta)$ 之规定知双纽线关于 O 点对称, 形成双纽 (蝴蝶结) 形状.

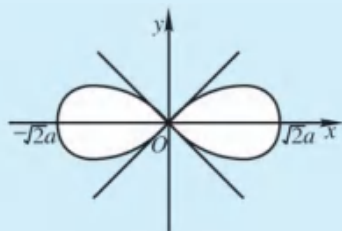


图 1-23

1.5 柱坐标系

到圆形体育场去看体操锦标赛,你坐的位置可以用三个数据来确定,一个是座位与赛场中心的水平距离 ρ ,一个是看赛场中点时视线与向北方向的夹角 θ ,一个是座位的高度 z ,有序三数组 (ρ, θ, z) 即可唯一确定你的座位.

一般而言,若 M 是空间一点, $Oxyz$ 是空间直角坐标系, M' 是 M 向 xOy 平面作垂线的垂足,以 O 为极点,以 Ox 轴为极轴在 xOy 平面上 M' 的极坐标为 (ρ, θ) ,而 M 点在直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) ,则称 (ρ, θ, z) 为 M 点的柱坐标(cylinder coordinate),这种坐标系称为柱坐标系,见图1-24. 给

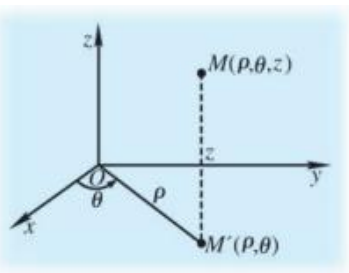


图 1-24

了柱坐标 (ρ, θ, z) ,则可唯一地确定一个点 M . 在柱坐标中,

$$\rho \in [0, +\infty), \theta \in (-\infty, +\infty), z \in (-\infty, +\infty).$$

由平面直角坐标与极坐标的互化公式,得空间直角坐标与柱坐标的互化公式

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

当动点绕定直线旋转时,用柱坐标刻画动点的位置与轨迹一般比空间直角坐标系方便一些.

例 一只蚂蚁沿半径为1的圆柱面螺旋式地上升,设空间直角坐标系的 z 轴即此圆柱的轴,此蚂蚁在 z 轴方向匀速上升的速度为 $v > 0$,匀速绕 z 轴转动的角速度为 $\omega > 0$,求 t 时刻蚂蚁所在的点的直角坐标与柱坐标.

解 设开始时($t=0$)蚂蚁在 $A(1, 0, 0)$ 点,如图1-25. t 时刻,蚂蚁爬到 M 点, M 点的空间直角坐标为 $(x(t), y(t), z(t))$,

点 M 的柱坐标中的 ρ 表示 M 在以 z 轴为轴以 ρ 为底面半径的柱面 Σ 上, $z=z$ 表示 M 点距 xOy 平面的距离(高(低)度), θ 表示 M 点与 z 轴确定的平面 π 与平面 xOz 的夹角, M 点是柱面 Σ ,平面 π 与平行于 xOy 平面高度为 z 的平面的公共点. 因为 M 在柱面 Σ 上,所以名曰柱坐标.

柱面上的曲线,可以考虑用柱坐标方程来刻画.

M 点在 xOy 平面的投影为

$M'(x(t), y(t), 0)$, 于是

$$\begin{cases} x(t) = |OM'| \cos \theta, \\ y(t) = |OM'| \sin \theta. \end{cases}$$

又 $\theta = \omega t$, $|OM'| = 1$, 故

$$\begin{cases} x(t) = \cos \omega t, \\ y(t) = \sin \omega t. \end{cases}$$

于是 t 时刻蚂蚁所处的点 M

的空间直角坐标为

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos \omega t, \sin \omega t, vt).$$

M 点的柱坐标为

$$(\rho, \theta, z) = (1, \omega t, vt).$$

对于上述例题, 显然采用柱坐标比空间直角坐标更简明更方便, 而且从柱坐标上可以看出这只蚂蚁每时每刻距轴 Oz 皆为常数 $\rho = 1$, 第二个坐标数据 $\theta = \omega t$ 则清楚地表明它在 t 时刻已旋转了多大的角度, 从第三个坐标数据 $z = vt$ 清楚地表明它在 t 时刻的高度, 这些情形表明蚂蚁是沿图 1-25 中的空间等进螺旋线爬行, 所谓等进是指它等速上升又等速转动.

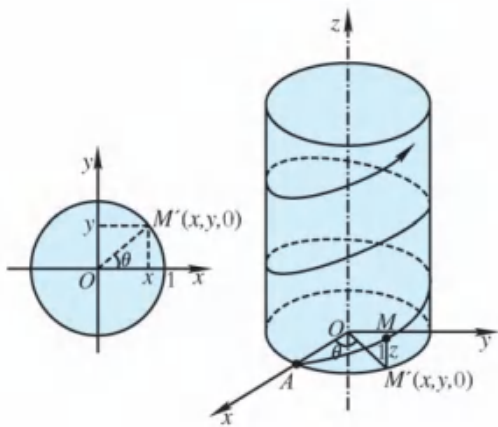


图 1-25

1.6 球坐标系

让我们从地球的经纬度谈起. 地球近似一个球体, 过南极北极的直径 NS 与英国伦敦格林威治天文台这个点确定的平面 α 与地球表面相交形成的圆上含格林威治天文台的半圆叫作“本初子午线”, 上述平面 α 绕地轴 NS 旋转所得平面 β 与地球表面的交线在南北极间的弧线叫作子午线, 也叫经线. 设本初子午线向东的子午线 L 是平面 β 形成的, α 与 β 之间的不大于 180° 的夹角为 θ_1 , 则称 L 是东经 θ_1 的子午线. 同理有西经 θ_2 的子午线, $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$. 东西经 180° 是同一条子午线, 叫作“国际日期变更线”, 它通过美俄之间的白令海峡.

取定地球表面一点 M ，过 M 作平面 γ 与赤道平面平行， γ 与地球表面的交线叫作纬线，纬线上一点与地球中心 O 所连直线与赤道平面的夹角 ψ 叫作 M 点的纬度，北半球的点的纬度叫作北纬度，同理有南纬度。北极是北纬 90° ，南极是南纬 90° 。

如果一地点（例如北京）所在的经度为东经 θ_1° ，纬度为北纬 φ_1° ，则说此地的位置为（东经 θ_1° ，北纬 φ_1° ），事实上应写成 $(r, \text{东经 } \theta_1^\circ, \text{北纬 } \varphi_1^\circ)$ ，其中 r 是地球的半径，见图 1-26。

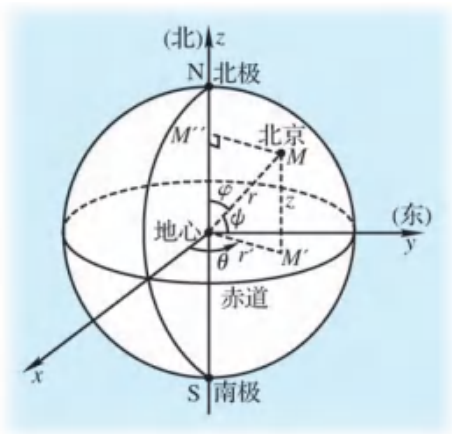


图 1-26

我们看到，按上述定义的东经度、西经度、南纬度、北纬度，取地球半径和一个经度数值、一个纬度数值，可以刻画地球上任何指定点的位置。

数学家沿用这种经度、纬度的方法创立了所谓球坐标系，即把东西经度 θ 统一成 $\theta \in (-\infty, +\infty)$ ，把两种纬度统一用 φ 替代， $\varphi \in [0, \pi]$ 。在图 1-26 中，空间中任取一点 M ，连接线段 OM ， O 点是空间直角坐标系的原点，过 M 作 xOy 平面的垂线，垂足是 M' ，连接线段 OM' ，则称 OM 的长是 M 点的矢径（向径），以 Ox 轴为始边逆时针为正的 $\theta = \angle xOM'$ 的大小为 M 点的“经度”，以 Oz 轴为始边 $\varphi = \angle zOM$ 的大小为 M 点的“纬度”，称有序三数组 (r, θ, φ) 为点 M 的球坐标（ball coordinate），它与平面极坐标系有相似之处，只不过点的位置需要有序三数组来标志，球坐标比平面上点的极坐标多了一个角度 φ ，所以球坐标也称空间极坐标，其中 $r \in [0, +\infty)$ ， $\theta \in (-\infty, +\infty)$ ， $\varphi \in [0, \pi]$ 。

若图 1-26 中 M 点的直角坐标为 (x, y, z) ，则 (x, y) 是点 M' 在 xOy 平面直角坐标系中的坐标，由平面上的极坐标与直角坐标的关系知

$$\begin{cases} x = |OM'| \cos \theta = r' \cos \theta, \\ y = |OM'| \sin \theta = r' \sin \theta. \end{cases}$$

M 点在以 r 为半径、中心在原点的球面上， M 点在 M' 点与 z 轴确定的平面上，此平面与 x 正方向夹角为 θ ， M 点在顶点为原点，半顶角为 φ 的以 z 轴为轴的圆锥面上， M 点是上述球面、平面与锥面的公共点，有序三数组 (r, θ, φ) 就是 M 点的球坐标，因为其第一分量 r 表示点 M 在半径为 r 的球面上，所以称 (r, θ, φ) 为球坐标。它是平面极坐标系中添加了一个角度分量 φ 而向空间的推广，故球坐标也可称为空间极坐标。

由于 $r' = r \sin \varphi$, 所以①中的头两个式子是 M' 点的极坐标 (r', θ) 与直角坐标 (x, y) 的互化, 第三个式子是 M 点的高度, 是 OM 在 z 轴的投影, 所以 $z = r \cos \varphi$.

其中 $r' = |OM'|$.

过 M 点在 $\triangle OMM'$ 所在的平面内作 $MM'' \parallel OM'$, M'' 在 z 轴上, 则 $|M'M| = |OM'| = r'$, 而在直角三角形 $\triangle OMM''$ 中

$$\frac{|MM''|}{|OM|} = \sin \varphi,$$

其中 $|OM| = r$, 故 $r' = |OM'| = r \sin \varphi$, 于是

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta. \end{cases}$$

又 φ 与 ψ 互余, $|MM'| = r \sin \psi = r \cos \varphi$, 即 $z = r \cos \varphi$. 球坐标与直角坐标的关系如下:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases} \quad ①$$

由①式得

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta, \\ y^2 = r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta, \\ z^2 = r^2 \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi) \\ &= r^2 [\sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \varphi] \\ &= r^2 [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] \\ &= r^2. \end{aligned}$$

即空间直角坐标系中的点 $M(x, y, z)$ 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 其中 r 是 M 与原点的距离, 如果动点 M 到原点 O 的距离 r 是常数 $r_0 > 0$, 则此种动点 M 组成的曲面是以 O 为中心, 以 r_0 为半径的球面, 所以在球坐标系中, 方程

$$r = r_0 \quad ②$$

表示半径为 r_0 中心在原点的球, 在空间直角坐标系中, 此球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2. \quad ③$$

方程③的表达方式不如球坐标方程②简洁, 而且②表达的几何含义(动点向径不变)也比较直白明显. 球坐标在处理含平方和 $x^2 + y^2 +$

z^2 的方程或有关球的问题时是比较方便的, 在处理空间旋转体的有关问题时也往往提供方便.

例 一只蚂蚁在一个母线与轴线夹角 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面上从顶点出发盘旋着向上爬行, 已知它上升的速度为 $v > 0$, 盘旋的角速度为 $\omega > 0$, 求 t 时刻此蚂蚁的位置.

解 取此圆锥顶点 O 为坐标原点, 见图 1-27. 建立球坐标系, 设 t 时刻蚂蚁在点 $M(r, \theta, \varphi)$, 由题意, $\theta = \omega t$, $z = vt$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

而

$$\frac{z}{r} = \cos \varphi = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

于是

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}z = \frac{2\sqrt{3}}{3}vt.$$

故得知 t 时刻蚂蚁在球坐标系中的位置为

$$M = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}vt, \omega t, \frac{\pi}{6} \right), t \in [0, +\infty).$$

蚂蚁爬行的轨迹方程为

$$\begin{cases} r = \frac{2\sqrt{3}}{3}vt, \\ \theta = \omega t, \\ \varphi = \frac{\pi}{6}. \end{cases} \quad (4)$$

如果事先告知一个动点轨迹的球坐标方程为④, 我们可以从这种球坐标方程“解读”出这条曲线的性状:

(1) 由 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 及球坐标中 φ 的几何意义, 可知此曲线在 z 轴与其轴线重合的圆锥面上, 此锥顶在原点, z 轴与圆锥母线夹角为 $\frac{\pi}{6}$;

(2) 由 $\theta = \omega t$ ($\omega > 0$, 常数) 及 θ 的几何意义知此轨迹在绕 z 轴以 ω 的角速度无穷地逆时针旋转;

(3) 由 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}vt$, $v > 0$ 是常数, 说明此曲线上的动点的位置越来越高, 等速上升.

这个锥面启发我们考虑球坐标, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 这个盘旋告诉我们 θ 在变, 上升的高度是 z .

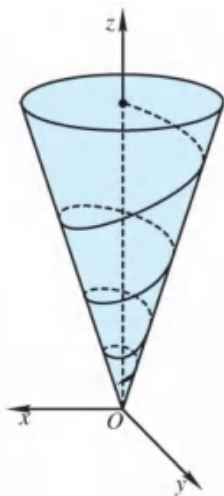


图 1-27

习题 1

1. (1) 设计一个伸缩变换, 把椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ 变成面积为 π 的圆;

(2) 设计一个伸缩变换, 把椭圆 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$ 变成单位圆.

2. 在极坐标系中作出下列各点:

$$A\left(1, \frac{\pi}{3}\right), B\left(1, \frac{\pi}{2}\right), C\left(2, \frac{2}{3}\pi\right), D(2, \pi), E\left(3, \frac{4}{3}\pi\right), F\left(3, \frac{5}{3}\pi\right).$$

3. 下列极坐标方程表示什么曲线, 且画出图象:

$$(1) \rho=10; \quad (2) \theta=\frac{\pi}{6}.$$

4. 写出下列图形的极坐标方程, 且画出图象 (已知点为极坐标):

(1) 过点 $\left(10, \frac{\pi}{4}\right)$ 且平行于极轴的直线;

(2) 过点 $\left(10, \frac{\pi}{4}\right)$ 且垂直于极轴的直线;

(3) 过点 $(1, 0)$ 和极轴夹角 $\frac{\pi}{6}$ 的直线;

(4) 圆心在 $(1, \pi)$ 、半径为 1 的圆.

5. 画出满足下列极坐标方程的曲线的图象:

$$(1) \rho \cos \theta = 1; \quad (2) \rho = 6 \cos \theta;$$

$$(3) \rho = 10 \sin \theta; \quad (4) \rho = 10(1 + \cos \theta).$$

6. 写出圆 $\rho = 2a \cos \theta$ 上从极点出发的弦的中点的轨迹方程.

7. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程:

$$(1) x^2 + y^2 = 1; \quad (2) xy = 1;$$

$$(3) x^2 + y^2 + 2x = 0; \quad (4) x^2 - y^2 = 1.$$

8. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程:

$$(1) \rho = \tan \theta; \quad (2) \rho = \frac{1}{\cos \theta};$$

$$(3) \rho + 6 \cot \theta \csc \theta = 0; \quad (4) \rho(2 \cos \theta - 3 \sin \theta) = 3;$$

$$(5) \rho = \frac{3}{1 - 2 \cos \theta}.$$

9. 画出方程 $\rho(2 \cos \theta - 5 \sin \theta) = 3$ 的图象.

10. 写出满足下列条件的轨迹的极坐标方程, 且画其图象:

(1) 极径与极角成正比例;

(2) 极径与极角成反比例.

11. 把下列曲线的直角坐标方程化成极坐标方程:

(1) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$;

(2) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$;

(3) $x^2 = 2p\left(y + \frac{p}{2}\right)$.

12. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程:

(1) $\rho = 4 \sin^2 \theta$;

(2) $\rho = -4 \sin \theta + \cos \theta$;

(3) $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

13. 定点 M 的极坐标为 $(10, 30^\circ)$, 已知极点 O' 在直角坐标系 xOy 中的坐标为 $(2, 3)$, 极轴平行于 x 轴, 且极轴正方向与 x 轴正向一致, 两个坐标系的长度单位也一致. 求点 M 的直角坐标.

14. 在柱坐标系中, 下列方程代表什么曲面或曲线?

(1) $\rho = 1$;

(2) $z = 1$;

(3) $\begin{cases} \rho = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

15. 在球坐标系中, 下列方程代表什么曲面或曲线, 且画图.

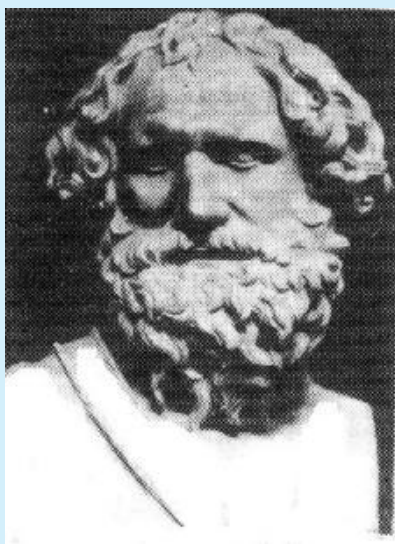
(1) $r = 1$;

(2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$;

(3) $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$



数学家阿基米德和他的螺线



阿基米德 (Archimedes, 希腊, 公元前 287—公元前 212)

阿基米德是历史上最伟大的数学家之一，是古代全世界最伟大的数学家。美国科学史家贝尔 (Bell) 在《数学人物》一书中写道：“任何一张列出开天辟地以来三位最伟大的数学家的名单上，必定写着阿基米德的名字。另两位可能是牛顿和高斯。不过以他们三位的宏伟业绩和所处的时代背景来衡量，或拿他们影响同时代或后代的深邃与久远而言，还是首推阿基米德。”

阿基米德是古希腊一位天文学家之子，由于阿基米德超人的聪明与勤奋，叙拉古的希伦王 (King Hieron) 很宠爱阿基米德这位天才少年。哲学家伏尔泰 (Voltaire, 1694—1778) 也认为：“阿基米德头脑里的想象力比荷马头脑中的要多。”

阿基米德是发现且证明圆面积公式与球体积公式的第一人。证明圆面积为 πr^2 时，阿基米德运用了朴素的极限思想和反证法，他是

最早运用反证法的数学家之一。特别是建立球体积公式时，他创造性地运用了定积分的思想，且把数学与力学有机地结合起来，解决了球体积这一当时的世界难题。阿基米德深刻指出：“力学便于我们发现结论，而几何学则能帮助我们证明结论。一旦这种思想方法深入人心，有些人，他们或者我的同代人或者是我们的后代，必然会利用它发现我尚未发现的定理。”

阿基米德的数学创造非常之多，数学史家希斯（Heath，1860—1941）在《希腊数学》一书中说：“阿基米德的著作百分之百地应视为数学论文的纪念碑。解题步骤的循循善诱，论证层次的合理安排，严格摒弃论证中的枝蔓，得体的修饰润色等等，总之，给人的完美印象是如此之深，使读者油然而生敬佩之情。”现代数学史家克莱因评价说：“阿基米德的严格性比牛顿和莱布尼茨著作中的高明得多。”莱布尼茨则中肯地说：“了解阿基米德的人，对后代杰出人物的成就就不会那么崇拜了。”

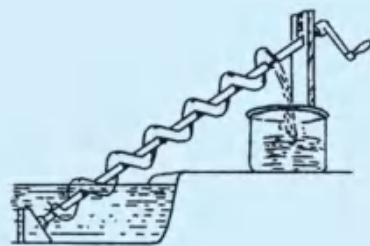
阿基米德专心致志，不谙世俗，狂而不妄，谦而不虚，重视理性，热心应用。例如阿基米德的科学幽默：“给我一个支点，我可以撬动地球。”是他理论型思维的艺术性表述。又一例是国王金冠掺假案的判定。希伦王令工匠打造了一顶金冠，国王怀疑工匠掺了银子，问阿基米德有无判断其真伪的办法，阿基米德直言承认自己对此没有现成的办法，久思不得其解。一日盆浴，一部分水被他排出盆外，同时感到身子变轻。他灵感涌现，发现身体的变轻与排出的水之重量是相抵的，从此他发现了著名的浮力定律。据说阿基米德当时忘乎所以，赤身奔向人行道狂呼：“答案找到了。”对科学的赤诚和忘我可见一斑。

阿基米德是极坐标思想的奠基人，他在其名著《论螺线》中论述了阿基米德螺线和空间等进螺旋线的性质，体现了极坐标与柱坐标的原始创意。

公元前5世纪，雅典的诡辩学派提出了三大几何作图问题，阿基米德利用他的螺线给出其中三等分角与化圆为方两大难题的非规尺作图法。

20 世纪伟大数学家
冯·诺依曼（Von Neumann，1903—1957）
说：“数学来源于经验。”他指出：“数学的最大灵感来源于自然科学，数学方法又支配着自然科学的理论分支，自然科学被打上数学的烙印。”

阿基米德还利用他创立的等进螺旋线发明了一架抽水机，见右图。当时用这种抽水机来灌溉农田、为沼泽地排水或把船舱的积水抽出，这种抽水设备今日埃及等地还在用。阿基米德一反古希腊数学家轻视应用的陋习，他的许多著作都有实际应用的创造性内容。



阿基米德的螺旋抽水机

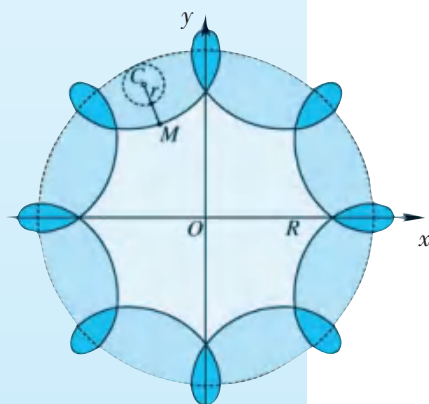
公元前 212 年，罗马军入侵叙拉古，当夜恰逢希腊女神节，阿基米德正在沙盘旁聚精会神地研究几何问题。敌兵闯入阿基米德的房间，阿基米德不知大难临头，还劝告那个目不识丁的匪兵小心不要弄乱沙盘上的几何图，可恨那兵卒手起刀落，一位闻名千古的大科学家阿基米德的天才头颅跌落在血泊之中！给人类的科学事业造成了不可估量的重大损失。

1965 年，西西里岛开工兴建一座大旅馆，挖地基时发现了阿基米德的坟墓，这是考古史上最重大的发现之一。阿基米德的墓碑上刻着一个球和球的外切圆柱，这是他的名著《球与圆柱》中的代表图示。

第2章

参数方程

设参数，写方程，算坐标，表图形.
时光逝，角度增，点运动，曲线成.
方向定，走直线，绕中心，画圆圈.
天行健，圆锥线，车轮滚，出摆线.
造齿轮，作速降，曲线美，应用宽.



2.1 从抛物运动谈起

炮管与地面夹角为 θ ，一发炮弹以初速度 $\vec{v}_0$ 射出，不计空气阻力，试写出平面直角坐标系中炮弹飞行轨迹的方程.

取炮口为原点， x 轴取水平方向，建立平面直角坐标系 xOy ，把初速度向量 $\vec{v}_0$ 分解成竖直分量 v_y^0 与水平分量 v_x^0 （见图 2-1），即 $\vec{v}_0 = (v_x^0, v_y^0)$ ，则有关系式

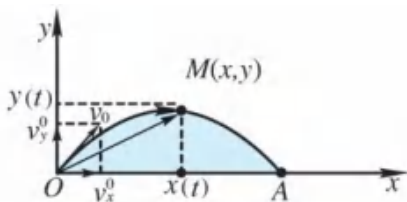


图 2-1

$$v_x^0 = |\vec{v}_0| \cos \theta, \quad v_y^0 = |\vec{v}_0| \sin \theta.$$

于是炮弹在 x 方向以 $v_x^0 = |\vec{v}_0| \cos \theta$ 的速度做匀速直线运动，在 y 方向以初速度为 $v_y^0 = |\vec{v}_0| \sin \theta$ 做竖直上抛运动. 以炮弹出膛的时刻为 $t_0 = 0$ 时刻，在落地前的任一时刻 t ，炮弹 M 的 **位置向量**（position vector） $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$ ，其中炮弹水平飞行的距离为

$$x(t) = v_x^0 t = |\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t.$$

炮弹竖直上抛达到的高度为

$$y(t) = |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$g = 9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}$ 是重力加速度. 于是 t 时刻炮弹的坐标为

$$(x, y) = \left(|\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t, |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \right), \quad ①$$

或写成方程组

$$\begin{cases} x = |\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t, \\ y = |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad ②$$

由①式知，当变量 t 取定之后，炮弹的位置 (x, y) 就可以算出来，

运动问题多考虑以
时间 t 为参数.

而变点 (x, y) 描画出的正是炮弹飞行轨迹的曲线. 这种表达炮弹飞行曲线的方式不仅方便, 易于建立和理解, 而且还可以反映出变量的运动学意义. 例如, 方程组②可以用公式来反映炮弹飞行的水平距离以及高度与时间的关系.

至于变量 t 的取值范围也不难确定, 它是从炮弹出膛到落地的时间段, 令

$$|\vec{v}_0| t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

由此以 t 为未知数的一元二次方程解得 $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2|\vec{v}_0|}{g} \sin \theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可知②中的 $t \in \left[0, \frac{2|\vec{v}_0|}{g} \sin \theta\right]$.

方程组②称为炮弹飞行曲线的**参数方程** (parametric equation), t 称为此参数方程的参数 (参变量). 以前我们学过的形如 $y = f(x)$ 或 $F(x, y) = 0$ 的曲线方程称为曲线的普通方程, 例如抛物线的方程 $y = x^2$ 与椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 就是普通方程.

一般地, 在取定的平面直角坐标系 xOy 中, 如果一条曲线 L 上任意一点的坐标 (x, y) 的每个分量都是某个变量 t 的函数, 即

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (3)$$

而且对于 t 的每个允许值, 由方程组③确定的点 (x, y) 在 L 上, 则称③是曲线 L 的参数方程. 联系 x, y 之间关系的中介变量 t 称为参数方程的参变量, 简称参数.

参数方程中的参数可以取为某种物理量, 例如时间, 也可以取为某种几何量, 例如角度, 还可以取没有什么明显含义的参数.

参数方程与普通方程是曲线方程的不同形式, 许多曲线, 既可以写出它的普通方程, 也可以建立它的参数方程, 两种方程可以互化. 但是有的曲线, 则可以建立它的参数方程, 而不能或很难写出它的普通方程.

以炮弹抛射为例, 从它的运动曲线的参数方程②中解得

$$t = \frac{x}{|\vec{v}_0| \cos \theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

把④代入 $y = |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ 消去 t 得

$$y = \frac{-g}{2|\vec{v}_0|^2 \cos^2 \theta} x^2 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x. \quad (5)$$

⑤是一个开口向下的抛物线，它是抛物运动的普通方程.

例 一架轰炸机在距地面 H 的高空匀速水平飞行，飞行速度为 v_0 ，试建立从此飞机上投下的炸弹的运动方程，且从中计算出炸弹落地的时间和落点.

解 以投弹时飞机所在的点为坐标原点 O ，以飞机飞行的方向为 x 轴的正方向， y 轴向下，建立平面直角坐标系 xOy ，见图 2-2.

飞机在水平方向的速度是 v_0 ，则投下的炸弹的水平速度也是 v_0 ，即炸弹以 v_0 的速度沿 x 正向运动，同时它又做自由落体运动，两种运动的合成，形成一条炸弹运动的曲线 l ，在时刻 t 炸弹的位置向量为 $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$ ，则 $x(t), y(t)$ 应满足下面的方程组：

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t, \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2. \end{cases} \quad (6)$$

⑥即炸弹运动的参数方程，其中参数 t 是从 $t=0$ 开始炸弹运行的时间变量. 令 $y=H$ ，则得

$$H = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

即炸弹从投出到落地耗时为 $\sqrt{\frac{2H}{g}}$. 弹着点为

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

即炸弹向前沿水平方向运行了 $v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 才落地爆炸.

由⑥解得 $t = \frac{x}{v_0}$ ，代入 $y = \frac{1}{2}gt^2$ 消去参数 t 得

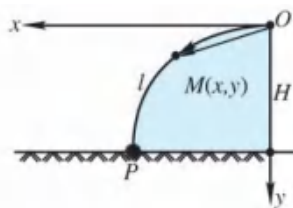


图 2-2

用时间为参数建立的物理、化学等领域的参数方程，不仅有易于建立的优点，而且可以从中得出有关物理量与时间的关系以及从中求得变化的时间长短等等.

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad ⑦$$

⑦是顶点在原点 O 的抛物线方程.

2.2 直线的参数方程

过 xOy 平面上定点 $M_0(x_0, y_0)$, 与 x 轴正向夹角为 θ 的直线 (line) l 如何用参数方程来表达?

设 $M(x, y)$ 是这条直线上的动点, 见图 2-3, 过 M 作与 y 轴平行的直线 l_1 , 过 M_0 作与 x 轴平行的直线 l_2 , l_1 与 l_2 交于 P 点. 由于

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \\ &= (x, y) - (x_0, y_0) \\ &= (x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

于是, 当 $x > x_0$ 时,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= |\overrightarrow{M_0M}| \cos \theta, \\ y - y_0 &= |\overrightarrow{M_0M}| \sin \theta. \end{aligned}$$

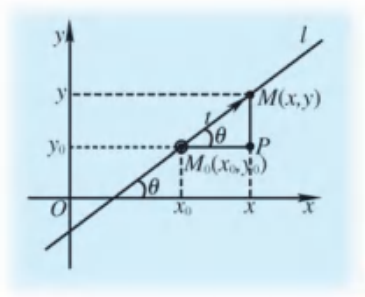


图 2-3

取向量的长度 $|\overrightarrow{M_0M}|$ 为参数, 得直线 l 上从 M_0 向右行的射线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + |\overrightarrow{M_0M}| \cos \theta, \\ y = y_0 + |\overrightarrow{M_0M}| \sin \theta. \end{cases} \quad ①$$

同理可得直线 l 上从 M_0 向左行的射线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 - |\overrightarrow{M_0M}| \cos \theta, \\ y = y_0 - |\overrightarrow{M_0M}| \sin \theta. \end{cases}$$

令 $|\overrightarrow{M_0M}| = |t|$, 最后得直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \theta, \\ y = y_0 + t \sin \theta. \end{cases}$$

角 θ 的始边是在 x 轴上向 x 轴正向的射线, 按逆时针方向转至直线 l .

几何问题多以角度为参数建立参数方程, 也可用别的变量为参数.

向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 的长度 $|\overrightarrow{M_0M}|$ 随 M 点的变化而变化, 是一个变量, 我们把它记成 $|t|$.

其中 $\theta \in [0, \pi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, t 是参数.

由于

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cos \theta, \\ y - y_0 = t \sin \theta. \end{cases}$$

所以

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (x \neq x_0),$$

$$y - y_0 = \tan \theta (x - x_0).$$

令 $\tan \theta = k$, 则得直线的点斜式方程

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (2)$$

其中 $k \in (-\infty, +\infty)$.

直线的参数方程的建立途径不是唯一的. 我们知道, 如果非零向量 $\vec{P}(a, b)$ 与直线 l 平行, 设 (x_0, y_0) 是 l 上任意取定的一点, (x, y) 是直线 l 上的动点, 见图 2-4. 则向量 $(x - x_0, y - y_0)$ 与向量 (a, b) 平行是点 (x, y) 在直线 l 上的充要条件, 即

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

图 2-4

令上式的值为 t , 则得直线的参数方程 (以 t 为参数):

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (3)$$

由③得

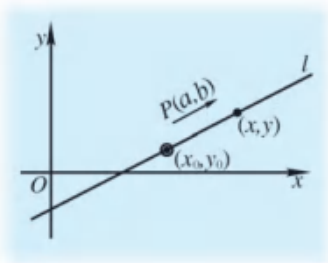
$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt,$$

于是

$$b(x - x_0) = abt = a(y - y_0),$$

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0). \quad (4)$$

记 $\frac{b}{a} = k$, 则得到的就是一条直线的点斜式方程.



2.3 圆锥曲线的参数方程

1. 圆的参数方程.

设曲线 L 是以 $M_0(x_0, y_0)$ 为中心、以 $r > 0$ 为半径的圆 (circle), 则 L 上任取的一点 $M(x, y)$ 与 $M_0(x_0, y_0)$ 的距离是 r , 见图 2-5.

过 $M_0(x_0, y_0)$ 作直线 l 与 x 轴平行, 连接 M_0M , 则 $M_0M = r$. 过 M 作 $MN \perp l$, N 为垂足. 设 M_0M 与 x 轴正向夹角为 θ , 则由正弦函数与余弦函数定义得

$$\frac{M_0N}{r} = \cos \theta, \quad \frac{MN}{r} = \sin \theta.$$

又 $M_0N = x - x_0$, $MN = y - y_0$, 于是

$$\frac{x - x_0}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y - y_0}{r} = \sin \theta.$$

最后得圆 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta, \\ y = y_0 + r \sin \theta. \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi), \theta \text{ 为参数}) \quad ①$$

由 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 则得

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r}\right)^2 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned} \quad ②$$

得出的②正是此圆的普通方程.

2. 椭圆的参数方程.

设 L 是一个椭圆, 其标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad ③$$

其中 a, b 是两个正数, 分别是长半轴与短半轴之长.

由③得

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \quad ④$$

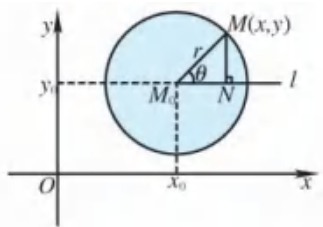


图 2-5

圆也是一种圆锥曲线 (conic section), 是一个正圆锥表面与水平截面截得的圆锥曲线, 是一种特殊的椭圆 (长短轴等长者).

避免多值性是参数方程的又一优点. 参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 中的 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是 t 的单值连续函数.

一个量的绝对值不超过 1, 一定可以找到一角 φ , 使得此量写成 $\cos \varphi$ 或 $\sin \varphi$, 以 $\cos \varphi$ 为多用, 因为当 $\varphi \in [0, \pi]$ 时, $\cos \varphi$ 取遍 $[-1, 1]$ 上一切值.

这个例题是希腊数学家鲍克勒斯(B Proclus, 410—485) 提出并解决的一个数学史上的名题.

由④知

$$\left| \frac{x}{a} \right| \leq 1,$$

所以我们可以假设

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (5)$$

把⑤代入④得

$$\cos^2 \varphi + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

于是得椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases} \quad (\varphi \in [0, 2\pi), \varphi \text{ 为参数}) \quad (6)$$

当 $a=b$ 时, 椭圆变成圆心在原点, 半径为 a 的圆, 这时⑥式变成

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = a \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (7)$$

这正是圆心为 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 半径 $r=a$ 时, 参数方程①的特殊情形, 即圆心在原点的圆的参数方程.

例 一条动直线上取定三个点 A, B, C , 其中 A, B 两点分别在一个直角的两边上滑动. 求 C 点的轨迹.

解 把直角的两边视为 x 正半轴与 y 正半轴, 直线上的两点 B 与 A 分别在 x 轴上与 y 轴上滑动, 见图 2-6, 设 $AC=a, BC=b$.

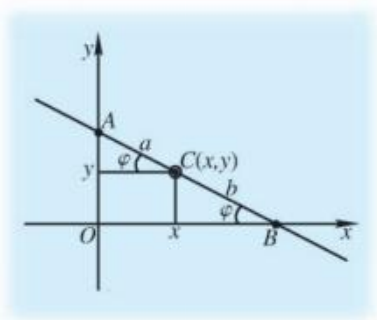


图 2-6

设 C 点坐标为 (x, y) , $\angle OBA = \varphi$, 则

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数}) \quad (8)$$

⑧恰为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程, 即 C 点的轨迹是以 a 与 b 为半轴的一个椭圆.

相似地可以证明, 当 C 点在 AB 线段之外时, C 点的轨迹仍是椭圆.

根据上述例题的结论, 可以如下制作一个画椭圆的所谓“椭圆规”:

在十字形金属(或木)板上做两条互相垂直的槽, 在一条直尺上钉上两个小钉子 A 与 B , 它们可分别在纵横槽中滑动, 在直尺上任取定一个与 A, B 两点相异的点 M , 在 M 点挖一个孔, 孔中插入铅笔, 使直尺转动一周, 则画出一个椭圆, 见图 2-7.

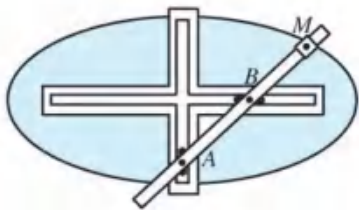


图 2-7

3. 双曲线的参数方程.

从双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

可以看出 $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$, 于是 $\left| \frac{x}{a} \right| \geq 1$, 故可以把 $\frac{x}{a}$ 写成

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

代入⑨得

$$\frac{y}{b} = \tan \varphi.$$

从而得出双曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi}, \\ y = b \tan \varphi. \end{cases} \quad (\varphi \in [0, 2\pi), \varphi \text{ 为参数})$$

4. 抛物线的参数方程.

抛物线(parabola)的标准方程为

$$y^2 = 2px,$$

令 $y=t$, t 作参数, 则得抛物线的参数方程如下:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p}t^2, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

请同学们自己证明:

椭圆规上 M 点不在线段 AB 上时, M 点的轨迹仍是椭圆.

一个量绝对值不小于 1, 则可找到一个角度 φ , 使得此量写成 $\frac{1}{\cos \varphi}$.

同一曲线的参数方程未必唯一, 例如双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程, 还有

$$\begin{cases} x = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \frac{e^t - e^{-t}}{2} = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

其中 $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, 叫作双曲余弦;

$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, 叫作双曲正弦.

2.4 平摆线及其参数方程

一个圆沿此圆所在的平面内一直线滚动，圆周上某个点 M 运动的轨迹称为**平摆线**(pendulum curve)，也称为旋轮线. 若滚圆直径为 $d=2a$ ，则图 2-8 中的曲线 $\overline{MM_1M_2M_3M_4}$ 就是平摆线的“一拱”.

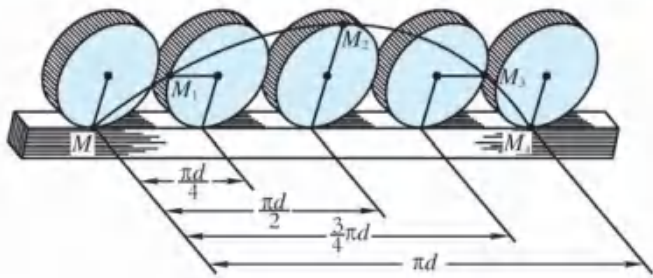


图 2-8

平摆线的普通方程 $F(x, y)=0$ 很难直接求得，我们来推导它的参数方程.

在直角坐标系 xOy 中，设圆与 x 轴切于原点 O ，这时圆上的切点为 M ，设此圆沿 x 轴的正向向前滚动，动点 M 的坐标为 (x, y) .

当圆滚动过圆心角 θ 之后，圆心移到 B 点，圆与 x 轴切于 A 点，见图 2-9. 这时 M 点已升至 x 轴上方. 作 $MD \perp Ox$ ，

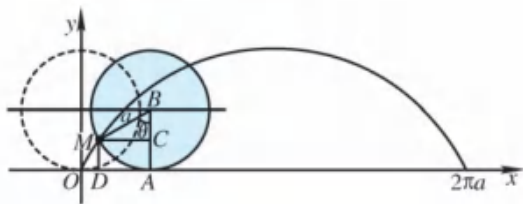


图 2-9

D 为垂足；连接 BA ，作 $MC \perp BA$ ，垂足为 C . 于是线段 OA 之长等于弧 $\widehat{MA}$ 之长. 取 θ 的单位为弧度，则 M 点的坐标 (x, y) 满足

$$x = OD = OA - DA.$$

而 OA 之长等于 $\widehat{MA}$ 之长， $\widehat{MA}$ 之长为 $a\theta$ ，其中 a 是圆的半径，故 $OA = a\theta$ ， $DA = MC = a \sin \theta$ ，于是得

$$x = a\theta - a \sin \theta.$$

容易看出

$$y = DM = AC = AB - CB = a - CB,$$

数学史上研究旋轮线(cycloid)的第一人是法国天才数学家帕斯卡(Pascal, 1623—1662)，他称旋轮线是“几何学中的美人”(the helen of geometry). 由于它有许多初等几何难以解决的问题，被 17 世纪数学家戏称为“争吵的祸根”(the apple of discord).

把自行车外胎上贴上一小块黄色胶带，开始时让这块胶带在地平面上，再慢慢沿直线推自行车前进，盯住这块胶带，看它在空中画出一条什么曲线. 也可以制作如图 2-8 所示的教具来观察旋轮线的形成过程. 有条件的可以用计算机软件来演示旋轮线的生成过程.

而 $CB=a \cos \theta$, 于是得

$$y=a-a \cos \theta.$$

最后得平摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin \theta), \\ y=a(1-\cos \theta), \end{cases} (\theta \in (-\infty, +\infty), \theta \text{ 为参数})$$

其中参数 θ 是过圆周上点 M 的半径与过圆与 x 轴切点的半径的夹角.

圆滚动一周时, M 点由原点先是上升, 后是下降再落在 x 轴上, M 点滚过的水平距离为 $2a\pi$, 这时, M 点画出的曲线叫作平摆线的一拱.

当 $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$ 时, 则产生平摆线的第二拱. 圆不停地滚动, 圆心角每转过 2π , M 点则描绘出一拱; 如果此圆从原点出发向左滚, 则会产生双向无穷多拱的整条平摆线. 每拱的最高点为滚圆直径 $2a$ 那么高.

2.5 渐开线及其参数方程

在一个固定的圆盘的圆周上缠绕着一条无弹性的柔顺细线, 在此细线的外端系上一支铅笔, 把此线拉紧保持与此圆相切地逐渐展开, 铅笔画出的曲线称为此圆周的**渐开线**(gradually open up curve), 此圆称为渐开线的基圆, 见图 2-10.

下面我们建立圆的渐开线的参数方程.

设渐开线的基圆中心为平面直角坐标系 xOy 的坐标原点 O , 基圆半径为 r , 细线的外端初始在 A 点, A 点是正半 x 轴与基圆交点, 见图 2-11.

设 $M(x, y)$ 是此圆渐开线上的一个动点, BM 是基圆的切线, B 为切点, 连接 OB , $\angle AOB$ 以 OA 为始边, $\angle AOB=\theta$, 我们设定 θ 为圆的渐开线的参数方程的参数. 由圆的渐开线的定义, BM 与 $\widehat{AB}$ 等长, $\widehat{AB}$ 的长度是 $r\theta$, θ 以弧度为单位.

意大利大科学家伽利略 (Galilei, 1564—1642) 曾建议用平摆线的一拱来修筑拱桥的桥洞. 我国古建筑赵州桥的桥洞也近似成平摆线形.

显然, 渐开线也可以视为直线在圆上滚动时, 直线上指定点的轨迹.

在运动场上拿一根跳高的横杆紧贴在铅球投掷圈上，在地面上拨动这一横杆，看它的端点画出一条什么曲线？或用微机软件演示渐开线的生成过程。

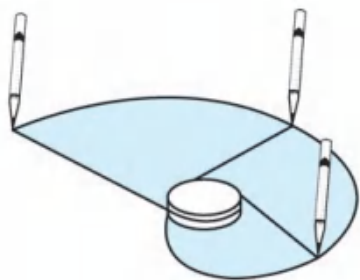


图 2-10

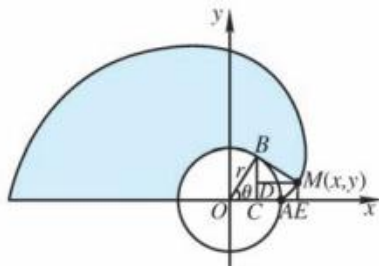


图 2-11

作 $ME \perp Ox$, $BC \perp Ox$, $MD \perp BC$, 垂足分别为 E, C, D 三点, 由于 BM 是切线, 故 $MB \perp OB$, 于是 $\angle MBD = \angle AOB = \theta$, 进而可得

$$\begin{aligned} x &= OE = OC + CE \\ &= OC + DM \\ &= r \cos \theta + BM \sin \theta. \end{aligned}$$

而 $BM = \widehat{AB} = r\theta$, 故得

$$x = r \cos \theta + r\theta \sin \theta. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &= EM = CD = CB - DB \\ &= r \sin \theta - BM \cos \angle MBD. \end{aligned}$$

而 $BM = \widehat{AB} = r\theta$, $\angle MBD = \theta$, 故得

$$y = r \sin \theta - r\theta \cos \theta. \quad (2)$$

由①与②, 我们得出圆渐开线的参数方程是

$$\begin{cases} x = r(\cos \theta + \theta \sin \theta), \\ y = r(\sin \theta - \theta \cos \theta). \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) \quad (3)$$

只要从计算器上求得 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 的值, 则可通过 +、-、 $\times$ 得出渐开线上一点 (x, y) 的位置, 如此, 对不同的 θ 值, 可以画出此渐开线上的许多点, 进而可以描绘其草图, 由此我们可以体会到渐开线参数方程的优越性, 而从③已很难推导出渐开线的形如 $y = f(x)$ 的普通方程了.

由渐开线定义, 关于同一个基圆, 存在两条渐开线, 两者关于 x 轴对称, 见图 2-12.

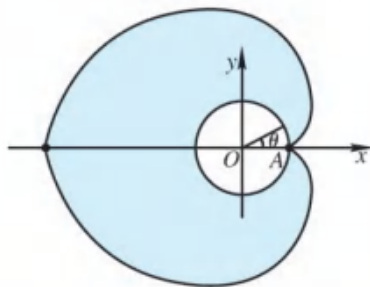


图 2-12

习题 2

1. 把下列参数方程化成普通方程, 其中 t 是参数:

$$(1) \begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt, \end{cases} \quad (p > 0).$$

2. 把下列普通方程化成参数方程:

(1) 设 $x = a \tan \theta$, θ 为参数, 写出 $xy = a^2$ 的参数方程;

(2) 设 $y = b \tan \theta$, θ 为参数, 写出 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程;

(3) 设 $x = 1 + 2 \cos \theta$, θ 为参数, 写出 $17x^2 - 16xy + 4y^2 - 34x + 16y + 13 = 0$ 的参数方程.

3. 把下列参数方程化成普通方程 (其中 t 与 φ 是参数), 并说明各表示什么曲线:

$$(1) \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 - 4t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 4 \cos \varphi, \\ y = 3 \sin \varphi; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right); \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = 5 \cos \varphi + 2, \\ y = 2 \sin \varphi - 3. \end{cases}$$

4. 设弹道的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(1) 当发射角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 写出弹道的普通方程和射程;

(2) 设 v_0 是常数, α 是变量, 证明 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 射程最大.

5. 已知弹道的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(1) 求炮弹从发射到落地的时间;

(2) 求炮弹的最大高度.

6. 画出下列参数方程的图象草图:

$$(1) \begin{cases} x = 3t - 5, \\ y = t^3 - t; \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \quad (2) \begin{cases} x = 5 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta; \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

$$(3) \begin{cases} x = \cos^3 \theta, \\ y = \sin^3 \theta; \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

$$(4) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

7. 写出 $4x^2 + y^2 = 16$ 的参数方程.

8. (1) 写出过点 $M(1, 5)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的参数方程;

(2) 利用(1)中的参数方程求 (1) 中直线与直线 $x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 的交点到 M 点的距离;

(3) 求(1)中直线与圆 $x^2 + y^2 = 16$ 的两个交点到 M 的距离的和与积.

9. 动点 M 做等速直线运动, 它在 x 轴与 y 轴方向的分速度分别为 9 和 12, 运动开始时, 点 M 位于 $A(1, 1)$, 求点 M 轨迹的参数方程.

10. 如图 2-13, OB 是曲柄, 长为 r , 绕 O 点转动, AB 是连杆, M 是 AB 上一点, $MA = a$, $MB = b$. 当 A 点在 Ox 上做往返运动时, 点 B 绕 O 点做圆周运动, 求点 M 的轨迹的参数方程.

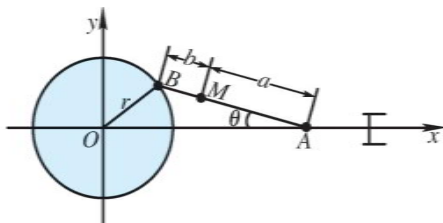


图 2-13

11. 如图 2-14, OA 是定圆直径, 长 $2a$, 直线 OB 与圆交于 M_1 , 和过 A 点的切线交于 B , $MM_1 \perp OA$, $MB \parallel OA$, MM_1 与 MB 交于 M , 以 O 为原点, OA 为 x 轴正半轴, 求动点 M 轨迹的参数方程.

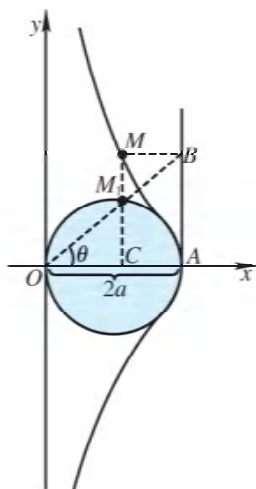
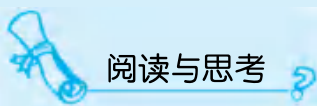


图 2-14



阅读与思考

美丽曲线种种

1. 摆线.

(1) 变幅平摆线.

xOy 平面上, 一个圆沿 x 轴滚动, 取定此圆一条半径 $O'Q$, 延长 $O'Q$ 到 M 点, 求 M 点的轨迹.

M 点的轨迹如图 2-15 所示, B_0 点是这个“带尾巴”的圆开始向右滚时, M 点的位置, B_1 是此圆滚动一周后, M 点所到之点, 其图象是以 $x=2\pi a$ 为周期的曲线.

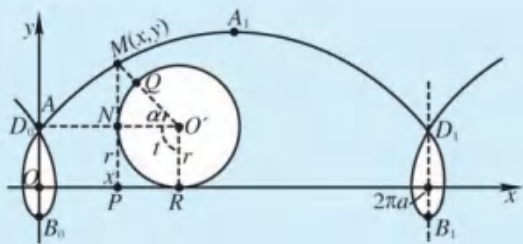


图 2-15

下面推导 M 点轨迹的参数方程.

令 $\lambda = \frac{O'M}{r}$, r 是圆半径. 作 $MP \perp Ox$, P 是垂足, 作 $O'N \perp MP$, N 是垂足; 设 R 是圆与 Ox 轴的切点, 则 OR 的长等于弧 RQ 的长, 令 $\angle RO'Q = t$, t 以弧度为单位, 则 M 点的横坐标 x 满足

$$\begin{aligned} x &= OR - O'N = rt - O'M \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= rt - \lambda r \sin t \\ &= r(t - \lambda \sin t). \end{aligned} \quad ①$$

M 点的纵坐标 y 满足

$$y = MN + NP = MN + r$$

$$\begin{aligned}
 &= r + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot MO' \\
 &= r + \lambda r \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= r(1 - \lambda \cos t).
 \end{aligned} \tag{2}$$

①与②组成 M 点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(t - \lambda \sin t), \\ y = r(1 - \lambda \cos t), \end{cases} \quad (\lambda > 1). \tag{3}$$

这种轨迹称为长幅平摆线或长幅旋轮线.

$\lambda = 1$ 时, 即 M 在圆周上, 这时③变成了平摆线的参数方程.

$0 < \lambda < 1$ 时, 即 M 在半径 $O'Q$ 上, 这时 M 点的轨迹形如图 2-16 所示, 此轨迹称为短幅平摆线或短幅旋轮线, 其参数方程同③.

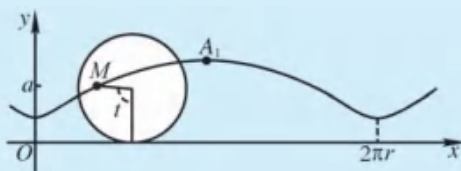


图 2-16

(2) 外摆线与内摆线.

一个圆固定不动, 另一个圆与此固定的圆外切着滚动, 在动圆周上一个指定点运动的轨迹叫作外摆线或圆外旋轮线.

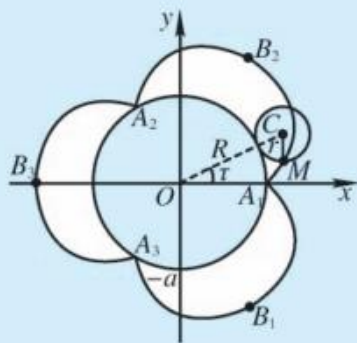


图 2-17

图 2-17 中以平面直角坐标系 xOy 原点 O 为圆心的圆是定圆, 以 C 点为中心的圆是与 $\odot O$ 外切滚动的动圆, A_1 是两圆的切点之一, 由 A_1 出发, $\odot C$ 上在 A_1 与 $\odot O$ 相切的动点 $M(x, y)$ 的轨迹为 $L =$

$A_1B_2A_2B_3A_3B_1A_1$, L 就是一个**外摆线** (outside pendulum curve), 其中定圆半径 R 与动圆半径之比 $m = \frac{R}{r} = 3$. 在形成的外摆线上有 3 拱, 动圆滚 3 周, M 点又回到出发点 A_1 .

$m = \frac{R}{r}$ 是整数时, 外摆线有几个拱? $m = \frac{R}{r} = \frac{q}{p}$, $\frac{q}{p}$ 是既约分数, 当动圆绕定圆 p 周描出 q 个拱之后, M 点是否可回归到 A_1 ? 图 2-18 中, $m = \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$.

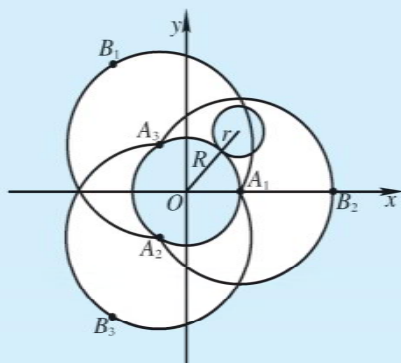


图 2-18

下面推导外摆线的参数方程.

$\odot O$ 与 $\odot C$ 外切于 Q , 由 C 向 Ox 作垂线 CP , P 是垂足, 由 M 点向 CP 作垂线, 垂足为 N , 开始时两圆外切于 A_1 点, 动点 M 在 A_1 处. 令 $t = \angle QOP$ 为参数, $\angle MCN = \alpha$, 由于 $\widehat{A_1Q}$ 与 $\widehat{QM}$ 等长, 见图 2-19, 角度以弧度为单位.

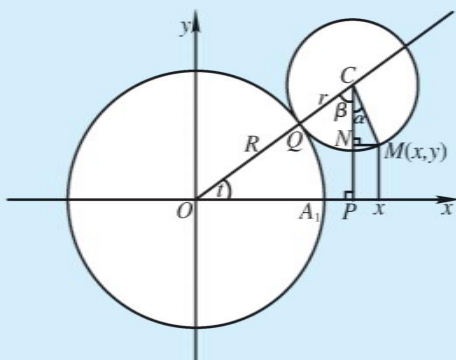


图 2-19

则

$$Rt = r(\alpha + \beta).$$

其中 $\beta = \angle OCP$, 从而 $\beta = \frac{\pi}{2} - t$,

$$\alpha = \frac{R+r}{r}t - \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} x &= MN + OP \\ &= r \sin\left(\frac{R+r}{r}t - \frac{\pi}{2}\right) + (R+r) \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ &= (R+r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t. \\ y &= NP = CP - CN \\ &= (R+r) \sin t - r \cos \alpha \\ &= (R+r) \sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t. \end{aligned}$$

至此得外摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t, \\ y = (R+r) \sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t. \end{cases} \quad (4)$$

若记定圆与动圆的连心线长为 $l = R+r$, 则④可写成

$$\begin{cases} x = l \cos t - r \cos \frac{l}{r}t, \\ y = l \sin t - r \sin \frac{l}{r}t. \end{cases} \quad (5)$$

下面讨论内摆线.

一个定圆与一个动圆内切, 动圆在定圆内内切地滚动, 动圆圆周上一个指定点 M 的轨迹叫作**内摆线** (inside pendulum curve) 或圆内旋轮线.

与外摆线相似地可以推导出内摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = l' \cos t + r \cos \frac{l'}{r}t, \\ y = l' \sin t + r \sin \frac{l'}{r}t. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $l' = R-r$, 是两圆圆心距.

和外摆线相似, $m = \frac{R}{r}$ 是整数时, 内摆线有 m 拱, 从 A_1 出发又回到 A_1 构成闭曲线, 若 $m = \frac{R}{r} = \frac{q}{p}$, $\frac{q}{p}$ 是既约分数, 则内摆线有 q 个拱, 形成由 A_1 始到 A_1 止的闭曲线; 若 $m = \frac{R}{r}$ 是无理数, 则内摆线构不成闭曲线, 动点 M 从 A_1 出发, 再也回不到 A_1 , 为什么?

当 $m=4$ 时, 内摆线有 4 拱, 见图 2-20, 此四角星称为**星形线** (star curve).

由参数方程⑥, 这时 $m=4$, 即 $R=4r$, $l'=R-r=3r$, 于是星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=3r \cos t + r \cos 3t, \\ y=3r \sin t - r \sin 3t. \end{cases} \quad (7)$$

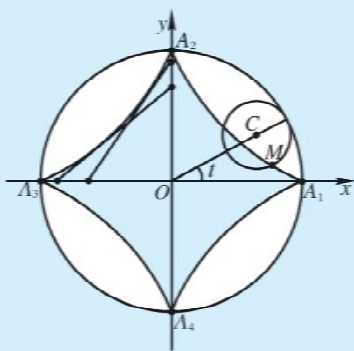


图 2-20

由于 $3\cos t + \cos 3t = 4\cos^3 t$, $3\sin t - \sin 3t = 4\sin^3 t$,

故星形线的参数方程可以化简为

$$\begin{cases} x=4r \cos^3 t, \\ y=4r \sin^3 t. \end{cases} \quad (8)$$

由⑧得

$$\cos t = \sqrt[3]{\frac{x}{4r}}, \quad \sin t = \sqrt[3]{\frac{y}{4r}},$$

$$\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

于是得星形线的普通方程为

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}, \quad (9)$$

其中 R 为定圆半径.

(3) 变幅外摆线和变幅内摆线.

当一个动圆与另一个定圆外切地滚动时, 在动圆一条指定的半径上或其延长线上的一点 M 的轨迹, 叫作变幅外摆线或变幅圆外旋轮线.

与前面推理相似地可以得到变幅外摆线的参数方程为

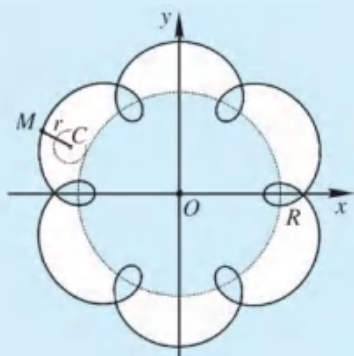
m 是定圆与动圆的半径之比, 当 m 是整数时, 内摆线是有 m 个角的星形曲线, 它们有内凹而对称的美好形象.

星形线的一个重要特征是它的切线夹在坐标轴间的线段等长.

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos t - \lambda \cos \frac{R+r}{r}t, \\ y = (R+r) \sin t - \lambda \sin \frac{R+r}{r}t, \end{cases} \quad (10)$$

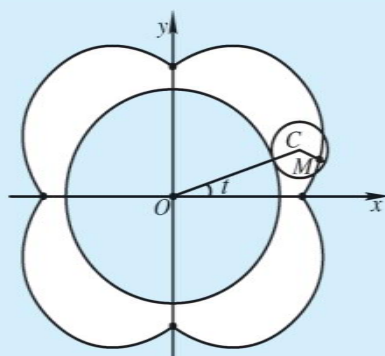
其中 R 是定圆半径, $\lambda = \frac{CM}{r}$, r 是动圆半径, 原点 O 是定圆中心, C 是动圆中心. $\lambda > 1$ 时, M 的轨迹叫作长幅外摆线, $0 < \lambda < 1$ 时, M 的轨迹叫作短幅外摆线.

$m = \frac{R}{r} = 6$, 长幅外摆线如图 2-21 所示, $m = 4$ 时短幅外摆线如图 2-22 所示.



$$m = \frac{R}{r} = 6$$

图 2-21



$$m = 4$$

图 2-22

下面讨论变幅内摆线.

定圆内切圆的指定半径上或半径延长线上一个指定点 M 的轨迹叫作变幅内摆线.

与前面相似地可以得出变幅内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (R-r) \cos t + \lambda \cos \frac{R-r}{r}t, \\ y = (R-r) \sin t + \lambda \sin \frac{R-r}{r}t. \end{cases} \quad (11)$$

其中 R 是定圆半径, r 是动圆(内切圆)半径. 图 2-23 中画的是 $m = 8$ 的长幅内摆线.

图 2-24 是 $m = 5$ 的短幅内摆线.

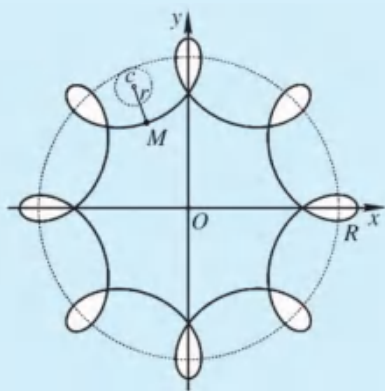


图 2-23

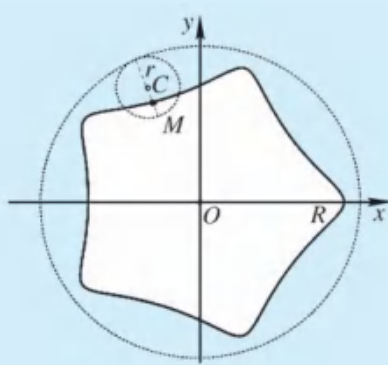


图 2-24

2. 卡丹转盘和齿轮.

卡丹转盘 (Cardano turn wheel), 也称卡丹旋轮. 一个定圆半径为 R , 一个小圆半径为 r , $R=2r$, 小圆内切地沿定圆滚动, 这个动圆即卡丹转盘.

若在动圆半径上取定一点 M , 设定圆圆心在直角坐标系 xOy 的原点, 则 M 点的轨迹是一条短幅内摆线, 由公式⑪得 M 点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=r \cos t + \lambda \cos t = (r+\lambda) \cos t, \\ y=r \sin t - \lambda \sin t = (r-\lambda) \sin t. \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{(r+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(r-\lambda)^2} = 1. \quad (12)$$

可见卡丹转盘(动圆)内一点的轨迹是椭圆.

我们知道, 九大行星的运动轨道是椭圆, 可见行星运动轨道是短幅内摆线.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$, $r=1$ 时, ⑫变成长半轴为 $\frac{3}{2}$, 短半轴为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆, 见图 2-25.

设定不同的 r 与 λ , 可以得出任意指定的椭圆, 事实上, 由⑫得长半轴 a 与短半轴 b 应满足

$$\begin{cases} a=r+\lambda, \\ b=|r-\lambda|. \end{cases}$$

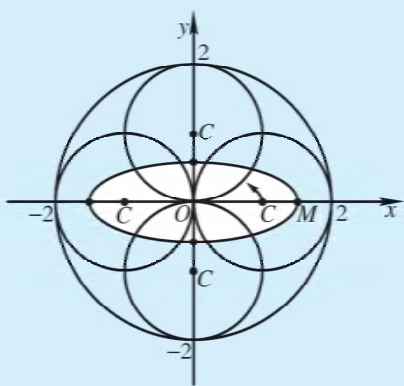


图 2-25

数学游戏与数学玩具中都含有引人入胜的乃至道理深刻的数学学问, 应该多玩玩这种游戏或玩具.

你想当一名有重要发明的工程师吗？如果想，就应当多学点数学，搞齿轮的工程技术人员岂止与渐开线或摆线打交道，数学是科学技术之母。

即由欲画出的椭圆的长短半轴，可以算出卡丹转盘的半径 r 和 λ 以及点 M 的位置。

摆线的另一个重要应用是用来设计齿轮的齿廓形状。圆摆线齿轮如图 2-26 所示。

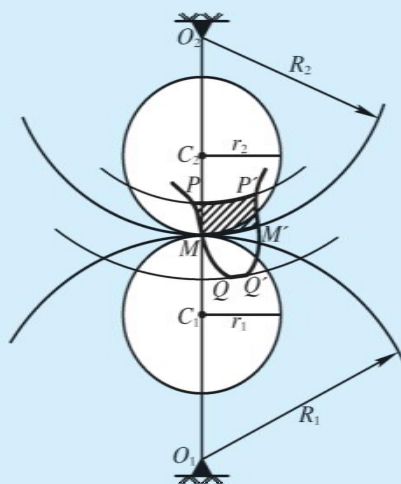


图 2-26

图 2-26 中， $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是两个相外切定圆， $\odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 是两个分别与 $\odot O_1$ ， $\odot O_2$ 相内切的动圆。 $\widehat{MQ}$ 是 $\odot C_1$ 沿 $\odot O_2$ 滚动时外摆线上一段弧； $\widehat{MP}$ 是 $\odot C_2$ 沿 $\odot O_2$ 滚动形成的内摆线上的一段弧。

$PMQQ'M'P'$ 是摆线齿轮上一个齿的轮廓线。它是以 $\odot O_2$ 的一条半径的延长线为对称轴的对称图形，齿轮上的其他齿与 $PMQQ'M'P'$ 是全等形。

摆线齿轮多在钟表中使用。这种齿轮传动时两齿的啮合充分，摩擦小，机件结构密切紧凑，使得机构精密准确。

机械设计中更多的是采用渐开线齿轮，如图 2-27 所示。这种齿轮的齿形的一侧是图中以 ϕ 为直径的基圆的渐开线的一段 $\widehat{AB}$ ，每齿是关于基圆半径延长线对称的形状，任二齿全等。基圆外的所谓齿顶与基圆内两齿之间的齿槽恰能吻合。这种齿轮具有省力、耐用、噪音小、传动力量大等优点，且两齿轮啮合时摩擦很小，

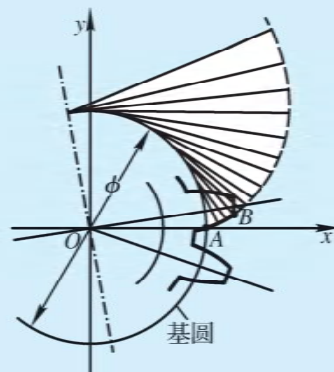


图 2-27

传动平稳.

3. 叶形线 (leaf curve).

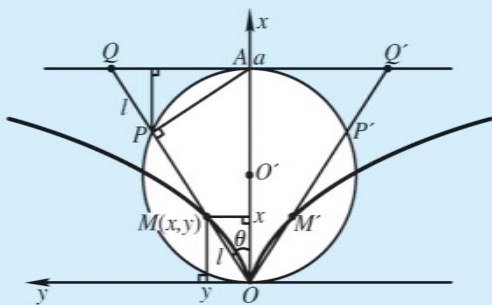


图 2-28

在图 2-28 中, 半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆 $\odot O'$ 与 y 轴相切, 原点 O 是切点, 过 O 的直径为 OA , 过 A 作 $\odot O'$ 的切线 QQ' , 过 O 任作一射线, 与 QQ' 交于 Q 点, 与 $\odot O'$ 交于 P 点, 在此射线上找到一点 $M(x, y)$, 使得 $OM = PQ$, 当射线绕原点转动时, 求动点 $M(x, y)$ 的轨迹. 此轨迹称为蔓叶线. 我们把 x 画得竖直向上, 是为了显示蔓叶线酷似由 O 点发芽长出的两个蔓.

下面推导蔓叶线的参数方程.

设 OQ 与 x 轴夹角为 θ , 连接 AP , 则

$$\angle APO = \frac{\pi}{2},$$

$$OP = a \cos \theta, \quad OQ = \frac{a}{\cos \theta}.$$

设 $PQ = l$, 则

$$l = OQ - OP = \frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta.$$

又

$$\frac{x}{OM} = \frac{x}{l} = \cos \theta, \quad l = \frac{x}{\cos \theta},$$

于是

$$\frac{x}{\cos \theta} = \frac{a}{\cos \theta} - a \cos \theta,$$

$$x = a - a \cos^2 \theta = a \sin^2 \theta,$$

君子兰、韭菜等都是蔓叶形植物, 自然界中的实际模型是数学模型的根源.

这是一个物理问题，实际到文盲也可以提出或重视的程度，可是又有多少人能揭示它的如此深刻的数学内涵呢？后来，大数学家欧拉（Euler, 1707—1783）和拉格朗日（Lagrange, 1736—1813）由速降线问题推广研究范围而创造出一门叫作“变分法”的重要数学分支。

仔细观察衣食住行当中的各种“小事”，你也许会发现不俗的数学概念。

$$y = l \sin \theta = \frac{x}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = x \tan \theta.$$

又 $\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ ，取参数为 $t = \tan \theta$ ，得蔓叶线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \frac{t^2}{1+t^2}, \\ y = a \frac{t^3}{1+t^2}. \end{cases} \quad (13)$$

4. 摆线应用.

(1) 速降线是摆线.

1696 年 6 月，瑞士大数学家约翰·伯努利（Jaham Bernoulli, 1667—1748）提出如下所谓速降线（fastest lending curve）问题：“在连接两个给定点的无限多条曲线当中，选择这样一条曲线，使得用一狭槽代替这条曲线时，狭槽较高点上放置的小球释放后，以最短的时间滑到狭槽另一端点。”

1697 年，牛顿、莱布尼茨、伯努利等几位领袖级数学家都给出了速降线的答案：它是一条平摆线。

如果把平摆线一拱从最高点剪断，再做成图 2-29 的结构，近似故宫太和殿屋顶的曲线，这种屋顶在大雨天会使雨水最快地从房顶流走。

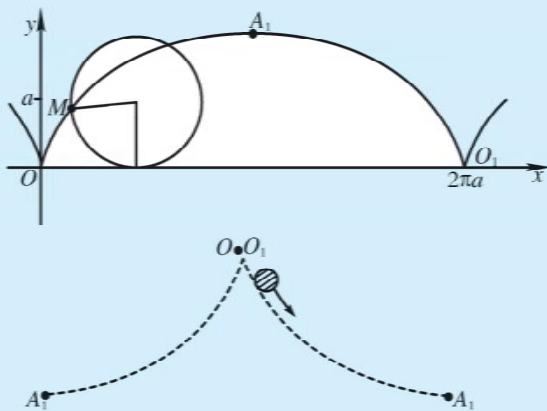


图 2-29

(2) 收割机、翻土机运作中的摆线.

“全喂入式联合收割机”前方安装平躺的一个正六（有的是正五）棱柱形“拨禾轮”，拨禾轮的横截面是一个正六（五）边形，考虑此正多边形的外接圆在平行于地平面的一条直线上滚动，则知拨

禾轮的每条横杆上的点的运动轨迹皆为平摆线；拨禾轮横杆把小麦等成熟作物揽向收割机的“切割器”刀口割下. 见图 2-30.

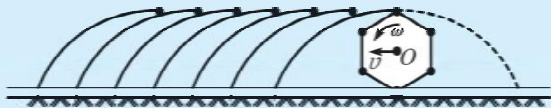


图 2-30

翻土机后方拖着一组“圆盘耙”，圆盘耙外周装有若干翻土的耙齿，每个耙齿的端点运动轨迹是一条长幅平摆线，见图 2-31.

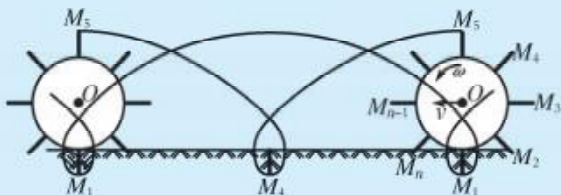


图 2-31

(3) 公共汽车门描绘的星形线.

AB 是车门的一扇, A 点沿 AB 滑动到 A' , B 点沿 BC 滑动到 B' 点, 在 A 点滑到 B 点的过程中, 门 AB 扫过的面积 (即图 2-32 中的阴影区) 的边界曲线 $\widehat{ADC}$ 是星形线的一拱 (它是 $m=4$ 的内摆线的一拱), 与此同时, 左侧的那扇门亦描出星形线的一拱.

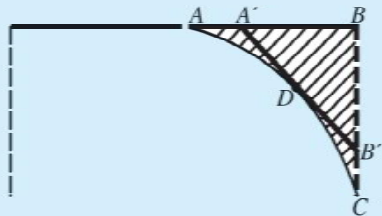


图 2-32

谁说农机具粗笨简单，它们身上有很多重要的数学道理.



数学实验

用计算机和教具绘制展现各种曲线

1. 运用计算机技术绘制展现各种动态曲线.

在必修第一册中,我们学过“用计算机研究二次函数的图象”,事实上,用计算机技术,不仅可以绘制与展现二次函数的图象,而且可以用计算机绘制展现心脏线、螺线、摆线、玫瑰线和叶形线等种种动人的曲线.

在老师的指导下,同学们可以划分成若干小组,在学校机房或家用电脑上用“Z+Z 超级画板”或具有类似功能的软件在计算机上进行数学实验,亲手绘制我们前面学过的各种曲线.

使用“Z+Z 超级画板”的免费版本作参数曲线,操作步骤如下:

(1) 打开超级画板.

(2) 用鼠标左键单击上方菜单项“作图”,在展开的菜单中单击“文本作图”,打开文本命令作图对话框,如图 2-33.



图 2-33

(3) 在对话框左下列表中单击“曲线”项前的十号,展开曲线

作图函数列表，双击表中第2行作参数曲线的函数 `Function ( , , , , , , )`，它会出现上方的空白栏里，如图2-34。



图 2-34

(4) 对照对话框中出现的函数变元的提示，可知这个函数式中要填的变元顺次为曲线上的点的横坐标的表达式 $x(t)$ ，纵坐标表达式 $y(t)$ ，参数 t ，参数最小值，参数最大值，描点个数和可省略的曲线名。为了画出参数方程为

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{(R+r)}{r} t, \\ y = (R+r) \sin t - r \sin \frac{(R+r)}{r} t \end{cases}$$

的摆线，要在对话框上部的栏里的函数括弧内填入变元如下：

`Function((R+r)*cos(t)-r*cos((R+r)*t/r), (R+r)*sin(t)-r*sin((R+r)*t/r), t, 0, 2*n*pi, 1000, )`.

然后单击对话框右部的“运行命令”按钮，就完成了曲线作图。

(5) 这时对话框并没有关闭，曲线可能只显示出一小段。道理很简单，参数方程里的字母变量 R ， r 和参数上限 $2*n*pi$ （即 $2n\pi$ ）的表达式中的变量 n 都没有取到适当值呢！为了调整这些变量的数值，下面来制作它们的变量尺。在对话框里单击“曲线”前的减号收起曲线作图命令的函数列表，单击“文本”项前面的十号，展开文本类函数列表，双击其中第5行插入变量尺的函数 `Variable ( , )` 使它粘

贴到上方空白栏（这个操作叫作调用函数 $\text{Variable}()$ ，下面不再详细叙述）。再调用 3 次，分别在函数括弧中键入变量名 R , r , n 和 k (k 的用处，下面很快就知道了)，如图 2-35。



图 2-35

单击对话框右部的“运行命令”按钮，作出 4 条变量尺如图 2-36。

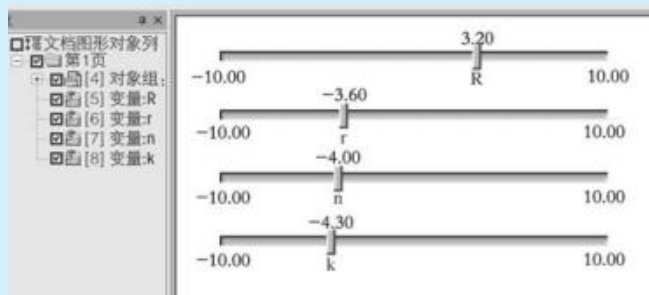


图 2-36

(6) 注意我们要画的是摆线，应当把半径为 R 的定圆画出来。

单击对话框中“文本”项前的减号收起文本作图命令的函数列表，单击“圆和圆弧”项前面的十号，展开圆和圆弧类函数列表，调用第 3 行的函数 $\text{CircleOfRadius}()$ （这是由圆心和半径作圆的函数）并填入变元 1 和 R （图 2-37），运行后作出以坐标原点为心半径为 R 的圆。（想一想，填入的 1 是什么意思？原来原点是编号为 1 的对象。这在屏幕左边或对话框右下部的对象列表中可以查出来。）

(7) 用鼠标把几个变量尺拖到适当的位置。拖动尺上的滑钮，可以调整 R , r 和 n 的值。如果把 n 调大一些，便可看出较完整的摆线。当 R 和 r 同号时是外摆线，异号时为内摆线。（图 2-38 和 2-39）。

(8) 用变量尺控制参数变化虽然方便，但不容易准确。例如，想

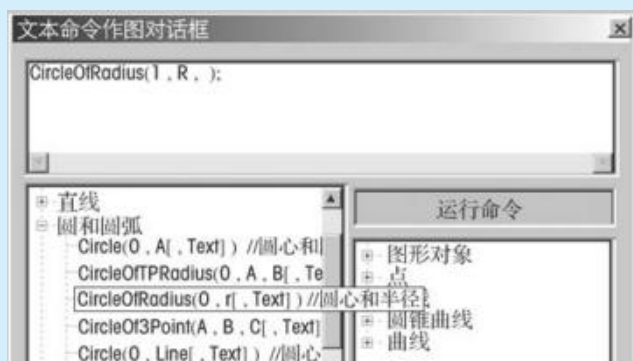


图 2-37

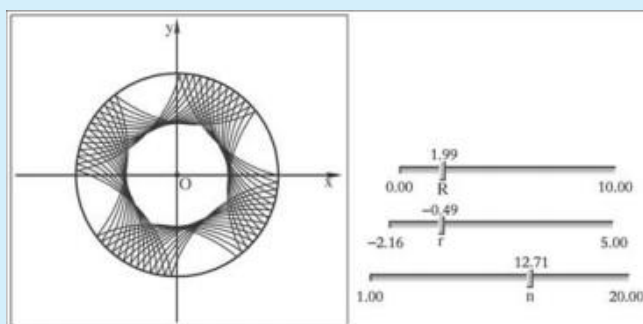


图 2-38

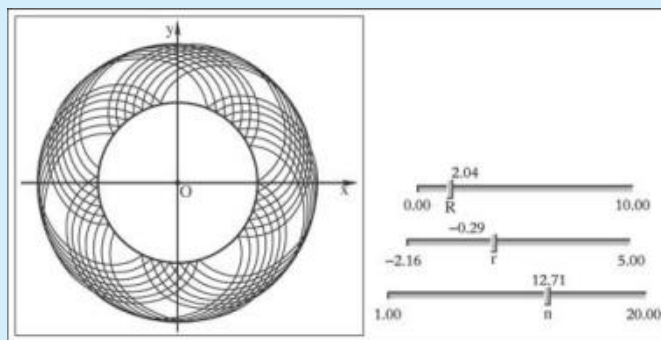


图 2-39

要 R 和 r 的比值等于 5，操作起来很难. 要想准确地控制参数变化，可用动画的功能. 单击右键打开右键菜单（图 2-40），再在菜单中单击“动画”，在弹出的“用户输入对话框”中键入字母 r （图 2-41），单击“确定”后打开变量 r 的动画属性设置对话框，将频率设置为 10，最小值和最大值都设置为 $R/\text{floor}(k)$ ，类型设置为“一次运动”（图 2-42）. 这里 $\text{floor}(k)$ 表示 k 的整数部分. 单击确定后生成一个动画按钮，单击这个动画按钮，变量 r 的值就变为 $R/\text{floor}(k)$ 了.

(9) 为了明确显示出 $\text{floor}(k)$ 的数值，可使用超级画板的测量



图 2 - 40



图 2 - 41



图 2 - 42

功能.单击上方菜单项“测量”，在展开的菜单中再单击“测量表达式”.在出现的测量表达式对话框上部空白栏里键入表达式 $\text{floor}(k)$ ，单击“确定”后屏幕上会出现 $\text{floor}(k)$ 数据文本，如图 2 - 43 . 由于不再继续测量，单击对话框右上角关闭它.

(10) 拖动变量尺上的滑钮，把 k 调得略大于 5，则 $\text{floor}(k)=5$. 单击动画按钮，使 $R/r=5$ ，得到 5 拱的外摆线（图 2 - 44）；把 k 调



图 2-43

得略大于 -7 , 则 $\text{floor}(k)=7$. 单击动画按钮, 使 $R/r=-7$, 得到 7 拱的内摆线 (图 2-45).

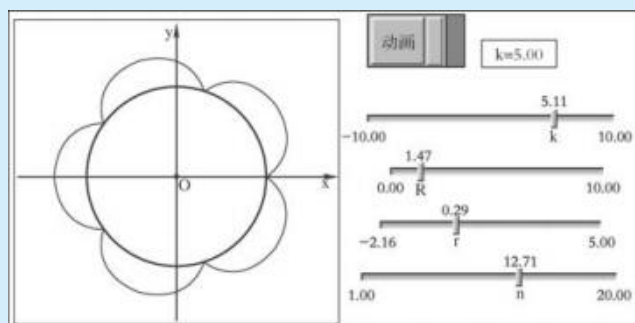


图 2-44

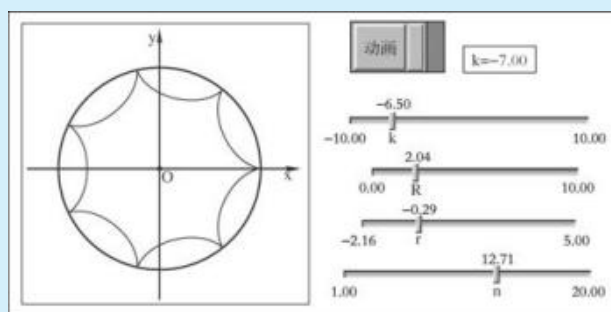


图 2-45

类似地, 对于 $R/r=4, 7, -3, -5, -6$, 可用上述方法作出图 2-46~图 2-50 所示的摆线.

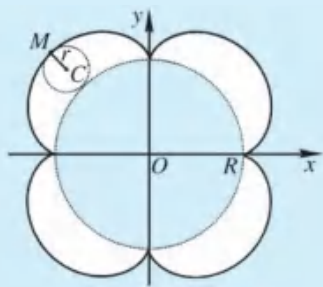


图 2-46

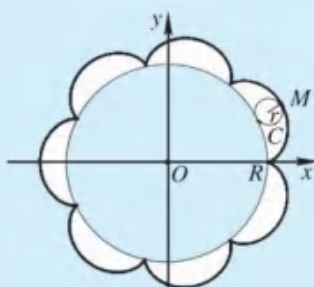


图 2-47

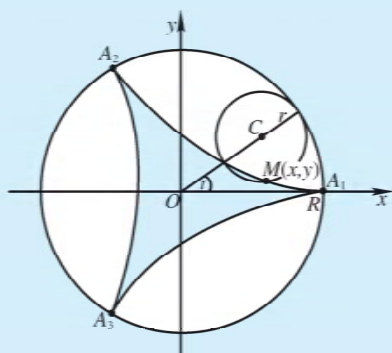


图 2-48

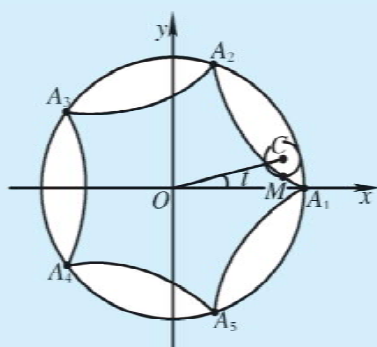


图 2-49

当 R/r 不是整数时, 得到更有趣的各种摆线, 同学们可以动手实验.

使用类似地操作, 可以做出形形色色的参数曲线. 也可以做出极坐标方程的曲线, 只是要调用曲线类文本作图函数中的第一行, 其中的曲线方程要写成 $\rho = f(\theta)$ 的形式, 这里 ρ 代表 ρ , 而 θ 代表 θ .

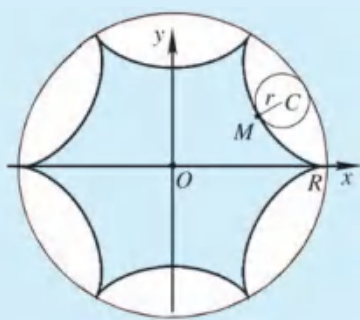


图 2-50

2. 用教具画摆线.

有一种称为“繁花规”的教具, 是在一个塑料板制的大白兔上挖掉一个圆片, 在大白兔身上的圆的内侧制成小齿牙, 另有小圆片若干个, 其半径各异, 每个小圆片的外沿也制成齿牙, 见图 2-51.

令小圆片沿兔子身上的圆内切地滚动, 把铅笔尖从小圆盘上一个小孔 M 上插入, 则下面压着的纸上就绘制出美丽的短幅内摆线. 所用的小圆片不同, 或插入的小孔不同, 则会绘出形状各异精彩纷呈的短幅内摆线, 见图 2-52~图 2-60. 它们的参数方程皆为

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + \lambda \cos \frac{R-r}{r}t, \\ y = (R-r)\sin t - \lambda \sin \frac{R-r}{r}t. \end{cases}$$

$\lambda = \frac{CM}{r}$, C 是动圆中心, r 是其半径.

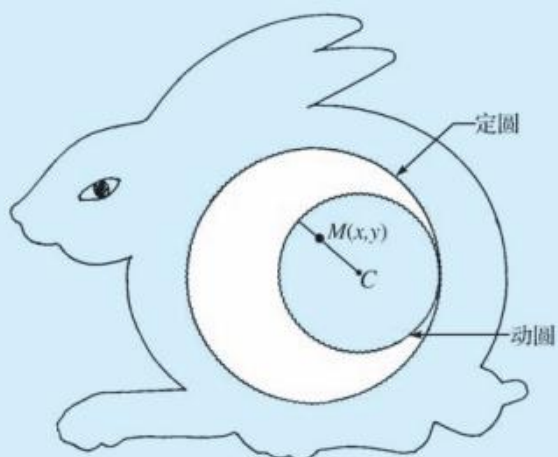


图 2-51

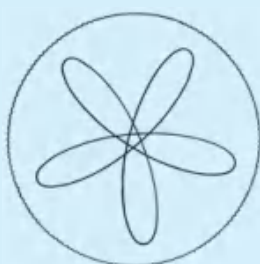


图 2-52

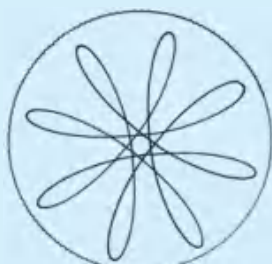


图 2-53

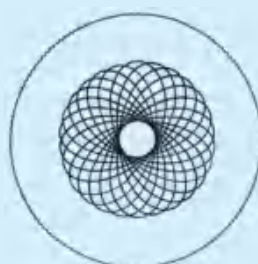


图 2-54

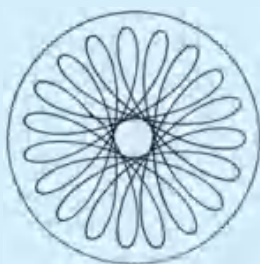


图 2-55

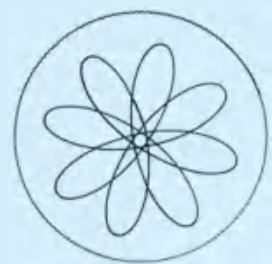


图 2-56

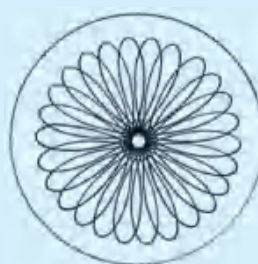


图 2-57

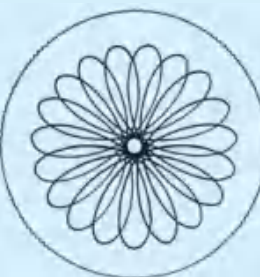


图 2-58

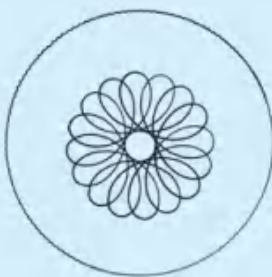


图 2-59

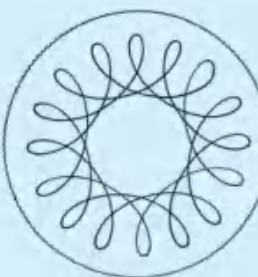


图 2-60

建议同学们用这种“繁花规”教具去画出更多的漂亮曲线，并感受摆线的奇妙。



数学家卡丹和帕斯卡

卡丹 (Cardano, 1501—1576), 生于意大利的帕维亚, 是一位多才多艺百科全书式的学者. 他是著名的几何学家、代数学家、天文学家、医学家、机械工程师和语言学家.

1520 年, 卡丹考入帕维亚大学医学院, 1526 年获医学博士学位. 他在学医的同时自学数学, 1534 年, 被聘为米兰大学数学教授. 他在数学科学的研究当中取得许多重大成果, 同时行医治病, 首创了当时属不治之症的伤寒病的治疗方法. 他是当时最出名的外科医生, 在医学和数学上同样成就斐然, 名声显赫.

1663 年, 卡丹根据他多年的赌博经验和丰富的数学理论, 出版了名著《赌博论》, 这部书是概率论的奠基性著作之一. 卡丹著作等身, 重要科学著作 200 多种, 是欧洲文艺复兴之后科学界最有积极影响的学者之一.

在几何学上, 他首先发明了能画椭圆的“卡丹转盘”, 他是研究摆线的第一人.

在代数方面, 他证明了三次方程求根公式和建立了四次方程根的求法. 他主张研究犹如 $\sqrt{-121}$ 这种“数”, 当时的数学家解一元二次方程时, 对于 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时, 总是宣布此方程无实根, 而舍弃形如 $\alpha\pm\sqrt{-121}$ 这种量. 他指出如果舍弃这种量, 就把三次方程的实根舍弃掉. 他公开说: “宁可接受道德上的折磨, 也要承认这种‘诡辩量’.” 为后来进而引入虚数 $i=\sqrt{-1}$ 和复数 $\alpha+i\beta$ 打开了局面.

在机械制造业当中, 卡丹发明了应用至今的“**卡丹万向接头**” (Cardano joint) 等多项重要而巧妙的装置.

三次方程的求根公式是意大利数学家塔塔利亚首先建立的，但塔塔利亚并未给出公式的证明，卡丹从塔塔利亚那里获得这一求根公式之后，给出了一个巧妙的证明。卡丹在自己的书中坦然宣布：“对于三次方程的求根公式，我的朋友塔塔利亚享有如此优异的、巧妙的、超人的聪明和人类精神的全部才能的这样一种发现的荣誉。”

卡丹的代表作是1545年出版的《大术，或论代数法则》，此乃高等代数的奠基性著作。他在实验物理、地质学、自然哲学等领域也有重要的建树。

帕斯卡（Pascal，1623—1662）是17世纪杰出的科学家之一。帕斯卡的父亲是一位颇有名气的数学家，考虑到小帕斯卡自幼体弱多病，而学习和研究数学是要为之付出极为艰苦的脑力劳动的，所以他不许帕斯卡学习数学。帕斯卡对于父亲及其朋友们的数学研讨耳濡目染，对数学产生了浓厚的好奇心，他请求家庭教师偷偷地给他讲解几何学。不久，他便独立地给出三角形内角和为 180° 的巧妙证明。父亲惊喜帕斯卡的数学天分，买了一本欧几里得的《原本》送儿子。帕斯卡如获至宝，废寝忘食地仔细研读。

由于健康原因，帕斯卡中学没有毕业就辍学在家自学数学，根本没有进过大学的课堂。他出于对数学的兴趣，每周都跟在父亲身后去梅森学院（法国科学院前身）听数学家的学术报告。16岁时，帕斯卡写出一篇关于圆锥曲线的文章，这位少年应邀在梅森学院作报告，在座的数学家们不敢相信此文是这个孩子写成的，与会的笛卡儿会后问帕斯卡的父亲，这篇文章是否是由父亲代笔写成的？老帕斯卡说他也是第一次听到这篇文章中的内容。笛卡儿惊呼，单凭这一篇文章，帕斯卡即可成为称职的数学家。

赌徒梅累向帕斯卡求解过下列“分赌本问题”：

甲乙掷骰子，各出赌本32个金币。约定甲先掷出三次六个点或乙先掷出三次四个点，就算胜了对方。甲已掷出两次六个点，在与甲相同的投掷次数下乙掷出一次四个点，这时赌博因故中断，问甲乙应如何分赌本64个金币？1654年，帕斯卡给著名数学家费马写信，通报了自己的正确解法。帕斯卡是概率论的创始人之一。

1657 年至 1658 年，帕斯卡系统地研究摆线，写出三本关于摆线的著作：《摆线通论》、《摆线通论续》、《摆线通论再续》，详细地论证了各式摆线的优雅性质，他还求出平摆线一拱的面积和重心，求得平摆线一拱绕 x 轴旋转一周得到的橄榄球形立体的体积，这些工作成了牛顿、莱布尼茨创立微积分的先导.

帕斯卡不仅是一位伟大数学家，而且是计算机的先行者. 1640 年到 1642 年，他研制出世界上第一台六位数手动计算机，此机原件现在巴黎工艺博物馆珍藏.

课程总结报告参考题

要求选修本课程的同学期末写出一份“坐标系与参数方程学习总结报告”，基本要求如下：

- (1) 极坐标如何刻画平面上点的位置？举例说明极坐标的优越性.
- (2) 怎样进行平面直角坐标与极坐标的互化？
- (3) 柱坐标与球坐标如何刻画空间点的位置？
- (4) 建立直线、圆、抛物线、椭圆与双曲线的参数方程.
- (5) 建立平摆线与渐开线的参数方程.
- (6) 列举摆线的一些应用.
- (7) 学习本课程，你有哪些感受和体会？

总结报告要求在 2 000 字以上，于本课程结束后一周内把报告稿送任课老师批阅打分.

附 录

数学词汇中英文对照表

(按词汇所在页码的先后排序)

中 文 名	英 文 名	页 码
平面直角坐标系	flat square coordinate system	2
伸缩变换	lengthen and shorten alternate	5
极坐标	polar coordinate	8
螺线	spiral curve	11
玫瑰线	rose curve	15
柱坐标	cylinder coordinate	19
球坐标	ball coordinate	21
阿基米德	Archimedes	26
贝尔	Bell	26
希伦王	King Hieron	26
伏尔泰	Voltaire	26
冯·诺依曼	Von Neumann	27
希斯	Heath	27
位置向量	position vector	30
参数方程	parametric equation	31
直线	line	33
圆	circle	35
圆锥曲线	conic section	35
鲍克勒斯	B. Proclus	36
抛物线	parabola	37
平摆线	pendulum curve	38

旋轮线	cycloid	38
帕斯卡	Pascal	38
伽利略	Galilei	39
渐开线	gradually open up curve	39
外摆线	outside pendulum curve	45
内摆线	inside pendulum curve	46
星形线	star curve	47
卡丹转盘	Cardano turn wheel	49
叶形线	leaf curve	51
约翰·伯努利	Jaham Bernoulli	52
速降线	fastest lending curve	52
欧拉	Euler	52
拉格朗日	Lagrange	52
卡丹	Cardano	62

普通高中课程标准实验教科书
数 学

选修 4-4

坐标系与参数方程

责任编辑：邹伟华

湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路 443 号）

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

客服电话：0731-85486979

湖南出版中心重印

重庆市新华书店经销

湖南天闻新华印务有限公司印刷

890×1240 16 开 印张：4.75 字数：110 000

2005 年 8 月第 1 版 2019 年 7 月第 1 版第 24 次印刷

ISBN 978-7-5355-4606-7

定 价：4.50 元

批准文号：渝发改价格〔2019〕946 号·举报电话：12358

著作权所有，请勿擅用本书制作各类出版物，违者必究。

如有质量问题，影响阅读，请与湖南出版中心联系调换。

联系电话：0731-88388986 0731-88388987

