2022年普通高校招生全国统一考试猜题压轴卷（A）

文科数学

本试卷满分150分，考试用时120分钟．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|-2\le x\le 1\right\}$，$B=\left\{x\middle|\left(x-1\right)^2>1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\left[-1,0\right)$　　B．$\left[-2,0\right)$　　C．$\left(0,1\right]$　　D．$\left(0,2\right]$

2．已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(-1,2\right)$，则 $\frac{z}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

A．$-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

3．已知条件 p：直线 $2x+y-4=0$ 与直线 $\left(a+1\right)x+a^2y-1=0$ 平行，条件 q：$a=1$，则 p 是 q 的（　　）

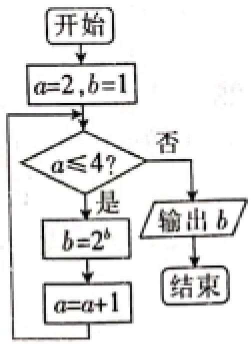
A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．笔、墨、纸、砚是中国独有的文书工具，即文房四宝．“笔、墨、纸、砚”之名，起源于南北朝时期．历史上，“笔、墨、纸、砚”所指之物屡有变化．在宋朝时，“笔、墨、纸、砚”特指宣笔（安徽宣城)、徽墨（安徽徽州歙县)、宣纸（安徽宣城泾县)、歙砚（安徽徽州歙县)、洮砚（甘肃卓尼县)、端砚（广东肇庆，古称端州)．若从宋朝特指的六种文书工具中任取两种，则这两种恰好都是产自安徽的概率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{5}$

5．执行如图所示的程序框图，则输出 b 的值为（　　）



A．32　　B．16　　C．8　　D．4

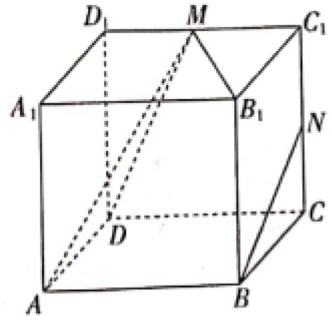
6．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 C_1D_1，CC_1 的中点，有下列三个判断：

①直线 B_1M 与 BN 是异面直线；

②$AD\perp$ 平面 CDD_1C_1；

③BN∥平面 ADM．

则上述判断中正确的个数是（　　）



A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

7．若关于 x 的不等式 $a\cdot 2^{|x|}>2^{|x|}+1\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 有实数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(1,+\infty\right)$　　　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　　　D．$\left[2,+\infty\right)$

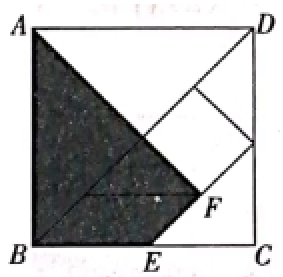
8．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=12$，点 E，F 分别是 AB，CD 的中点，沿 EF 将四边形 $AEFD$ 折起，使∠$AEB=60°$，若折起后点 A，B，C，D，E，F 都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为（　　）

A．64π　　　　B．72π　　　　C．84π　　　　D．96π

9．已知抛物线 C：$y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，点 $A\left(1,m\right)$ 为抛物线 C 上的一点，且 $\left|AF\right|=\dfrac{5}{4}$，点 B 是抛物线 C 上异于点 A 的一点，且 A，F，B 三点共线，则 $\left|BF\right|=$（　　）

A．$\dfrac{5}{16}$　　　　B．$\dfrac{1}{4}$　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{5}{8}$

10．七巧板是中国古代劳动人民发明的一种传统智力玩具，它由五块等腰直角三角形、一块正方形和一块平行四边形共七块板组成．（清）陆以湉《冷庐杂识》卷中写道：近又有七巧图，其式五，其数七，其变化之式多至千余，体物肖形，随手变幻，盖游戏之具，足以排闷破寂，故世俗皆喜为之．如图是一个用七巧板拼成的正方形 $ABCD$，若四边形 $ABEF$ 的面积为 7，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=$（　　）



A．$-4\sqrt{2}$　　　　B．-4　　　　C．$-2\sqrt{2}$　　　　D．-2

11．已知函数 $f\left(x\right)=\cos\pi x$，若存在 x_1，x_2，…，x_m 满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 5$，且 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{m-1}\right)-f\left(x_m\right)\right|=10\left(m\ge 2,m\in\mathbf{N}^*\right)$，则 m 的最小值为（　　）

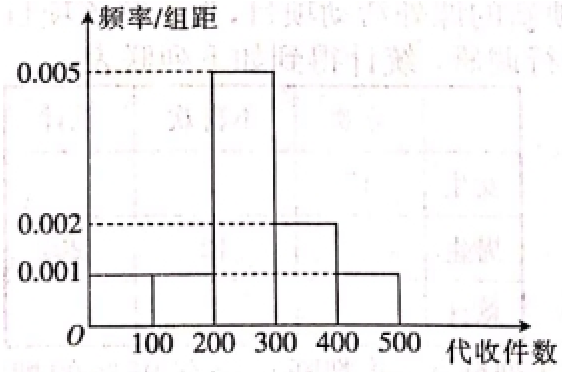
A．10　　　　B．8　　　　C．6　　　　D．5

12．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，且 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．2　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．$\sqrt{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．某快递驿站统计了近期每天代收快件的数量，并制成如下图所示的频率分布直方图．



则该快递驿站每天代收包裹数量的中位数为______．

14．已知不等式组 $\begin{cases}x+y\geq 2,\\ y\leq x,\\ x\leq 3\end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω，则直线 $2x+y+m=0\left(m\in\mathbf{R}\right)$ 被 Ω 截得的线段长度的最大值为______．

15．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\left(a+b-c\right)\left(a+b+c\right)=3ab$，且 $c=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，则角 B 的大小为______．

16．已知函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，且对定义域内的任意 x 都有 $f\left(1+x\right)=-f\left(1-x\right)$．当 $x\in\left(1,2\right)$ 时，$f\left(x\right)=1-\log_2 x$．给出以下 4 个结论：

①函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(k,0\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 成中心对称；

②函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 是以 2 为周期的周期函数；

③当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$f\left(x\right)=\log_2\left(2-x\right)-1$；

④函数 $y=f\left(\left|x\right|\right)$ 在 $\left(k,k+1\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 上单调递减．

其中所有正确结论的序号为______．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17.（12 分）

在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_3=3$，数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和S_n满足$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+1\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

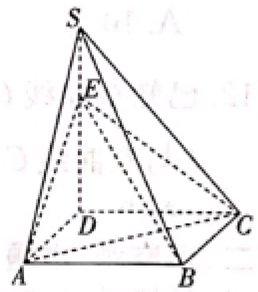
（2）若$b_n=\left(-1\right)^n a_n^2$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和T_n.

18.（12 分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，$SD\perp$平面 $ABCD$，$SD=2a$，$AD=\sqrt{2}a$，E 是 SD 上的点，且$DE=\lambda a\left(0<\lambda\le 2\right)$.

（1）求证：$AC\perp BE$；

（2）若点 B 到平面 ACE 的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，求实数λ的值.



19.（12 分）

某校体育教研组研发了一项新的课外活动项目，为了解该项目受欢迎程度，在某班男生女生中各随机抽取 20 名学生进行调研，统计得到如下列联表：

	喜欢	不喜欢	总计
女生	15		
男生		12	20
总计			

（1）根据题目要求，完成 2×2 列联表，并判断是否有 95%的把握认为“喜欢该活动项目与性别有关”；

（2）为了了解喜欢该活动与年级的关系，已知该校高一、高二、高三的学生分别为 3600 人，2400 人，1200 人，按分层抽样的方法随机抽取 6 人进行问卷调查，再从 6 人中随机抽取 2 人进行调查结果对比，求这 2 人中至少 1 人是高一学生的概率.

附：

参考公式：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，$n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P\left(K^2>k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001

k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20．（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x+a}{x}$．

（1）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，证明：$f\left(x\right)\le\dfrac{x}{2}$；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象恒在直线 $y=1$ 的下方，求实数 a 的取值范围．

21．（12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，长轴右端点到左焦点的距离为 $2+\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）点 P 是圆 O：$x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ 上的一点，过 P 作圆 O 的切线 l，且切线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，证明：$OA\perp OB$．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta$，直线 l_1：$\theta=\dfrac{\pi}{6}\left(\rho\in\mathbf{R}\right)$，直线 l_2：$\theta=\dfrac{\pi}{3}\left(\rho\in\mathbf{R}\right)$．以极点 O 为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系．

（1）求直线 l_1，l_2 的直角坐标方程以及曲线 C 的参数方程；

（2）已知直线 l_1 与曲线 C 交于 O，A 两点，直线 l_2 与曲线 C 交于 O，B 两点，求△AOB 的周长．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-4\right|+\left|x-1\right|-3$．

（1）求不等式 $f\left(x\right)\le 2$ 的解集；

（2）若直线 $y=kx-2$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的图象有公共点，求实数 k 的取值范围．

参考答案

1．B　易知 $B=\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$，故 $A\cap B=\left[-2,0\right)$．

2．D　由题意知复数 $z=-1+2\text{i}$，则 $\dfrac{z}{1+\text{i}}=\dfrac{-1+2\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{\left(-1+2\text{i}\right)\cdot\left(1-\text{i}\right)}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i}$．

3．A　若直线 $2x+y-4=0$ 与直线 $\left(a+1\right)x+a^2y-1=0$ 平行，则 $2a^2=a+1$，故 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$．

当 a＝1 时，$(a+1)x+a^2y-1=0$ 即为 $2x$＋y－1＝0，此时直线 $2x$＋y－4＝0 与直线 $(a+1)x+a^2y-1=0$ 平行；当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$(a+1)x+a^2y-1=0$ 为 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-1=0$，即 $2x$＋y－4＝0，此时直线 $2x$＋y－4＝0 与直线 $(a+1)x+a^2y-1=0$ 重合．故 p 是 q 的充要条件．故选 A．

4．D　由题意可知宋朝“笔、墨、纸、砚”有 6 种，其中 4 种产自安徽，从 6 种当中选 2 种，共有 15 种情况，且每种情况发生的概率相同，其中两种全部来自安徽的情况共有 6 种，所以所求概率为 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$．

5．B　当 a＝2 时，进入循环，b＝2，a＝3；当 a＝3 时，再次进入循环，$b=2^2=4$，a＝4；当 a＝4 时，再次进入循环，$b=2^4=16$，a＝5．所以当 a＝5 时应跳出循环，故输出 b 的值为 16．

6．C　由图易得 B_1M，BN 是异面直线，AD⊥平面 CDD_1C_1，①②正确；

BN∥平面 AA_1D_1D，BN 与 AD 不平行，显然 BN 与平面 ADM 不平行，故③错误．

7．A　由题知 $a\cdot 2^{|x|}>2^{|x|}+1(x\in\mathbf{R})$，而 $2^{|x|}\geq 1$，所以 $a>1+\frac{1}{2^{|x|}}$，且 $1<1+\frac{1}{2^{|x|}}\leq 2$．

因为关于 x 的不等式 $a\cdot 2^{|x|}>2^{|x|}+1(x\in\mathbf{R})$ 有实数解，所以 $a>1$．

8．C　易得△ABE，△DCF 都是边长为 6 的正三角形，设△ABE 的中心为 O_1，△DCF 的中心为 O_2，则球心 O 为线段 O_1O_2 的中点，易求得 $O_1A=2\sqrt{3}$，$OO_1=3$，所以球 O 的半径 $OA=\sqrt{O_1A^2+OO_1^2}=\sqrt{21}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=84\pi$．

9．A　由 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}=1+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$．则抛物线 C：$y^2=x$，$A(1,1)$，$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，

设 $B(b^2,b)$，因为 A，F，B 三点共线，所以 $\frac{1-0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{b-0}{b^2-\frac{1}{4}}$，解得 $b=-\frac{1}{4}$（b＝1 舍去），

故 $B\left(\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right)$，$|BF|=\frac{1}{16}+\frac{p}{2}=\frac{5}{16}$．

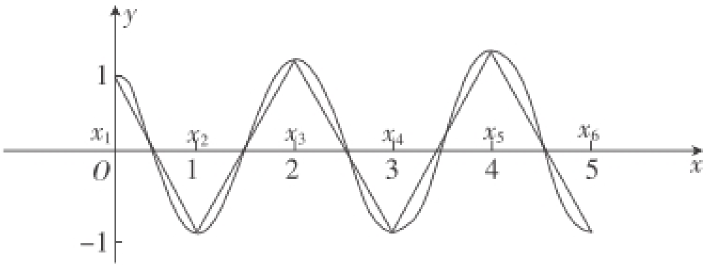
10．D　设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，则阴影部分面积 $S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{7a^2}{16}=7$，所以 a＝4，

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=\sqrt{2}\times 2\cos 135°=-2$．

11．C　∵ $y=\cos\pi x$ 对任意 x_i，$x_j(i,j=1,2,3,\cdots,m)$，都有 $|f(x_i)-f(x_j)|\leq f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=2$，

要使 m 取得最小值，尽可能让 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,m\right)$ 取得最值点，考虑 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 5$，

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{m-1}\right)-f\left(x_m\right)\right|=10$，按下图取值可满足条件，$\therefore m$ 的最小值为 6.



12．B　如图，因为 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|$，则取 AB 中点 M，连接 F_2M，可得 $F_2M\perp AB$，

设 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|=x$，因为 $\left|AF_2\right|-\left|AF_1\right|=2a$，则 $\left|AF_1\right|=x-2a$，

又因为 $\left|BF_1\right|-\left|BF_2\right|=2a$，则 $\left|BF_1\right|=x+2a$，$\left|AB\right|=\left|BF_1\right|-\left|AF_1\right|=4a$，

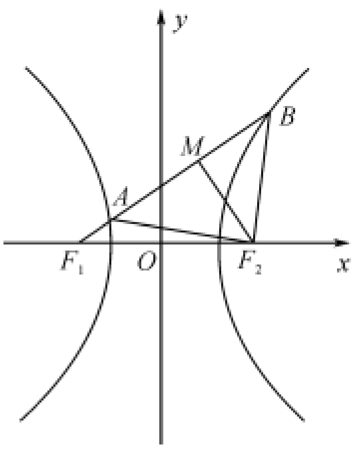
则 $\left|AM\right|=\left|BM\right|=2a$，则 $\left|F_1M\right|=x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$ 中，$\left|F_2M\right|=\sqrt{4c^2-x^2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_2M$ 中，$\left|F_2M\right|=\sqrt{x^2-4a^2}$，

所以 $\sqrt{4c^2-x^2}=\sqrt{x^2-4a^2}$，解得 $x^2=2a^2+2c^2$．因为直线 l 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\tan\angle MF_1F_2=\dfrac{\left|F_2M\right|}{\left|F_1M\right|}=\dfrac{\sqrt{2c^2-2a^2}}{\sqrt{2a^2+2c^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\dfrac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\dfrac{1}{3}$，$c^2=2a^2$，

所以离心率 $e=\sqrt{2}$．故选 B.

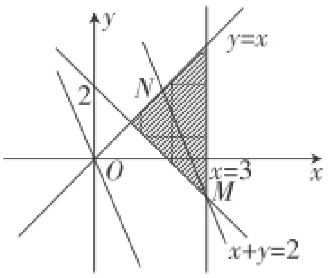


13．260　由题意知每天代收快件数量的中位数为 $200+\dfrac{0.3}{0.5}\times 100=260$.

14．$\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$　由约束条件作出不等式组表示的平面区域如图（阴影部分），作出直线 l：$2x+y=0$，将直线 l 平

移经过直线 $x+y=2$ 与直线 $x=3$ 的交点 $M\left(3,-1\right)$ 时，直线 $2x+y+m=0\left(m\in\mathbf{R}\right)$ 被 Ω 截得的线段长度最

大，此时直线 l 与直线 $y=x$ 的交点 $N\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，所以 $\left|MN\right|=\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$．



15．$\dfrac{\pi}{4}$　由 $\left(a+b-c\right)\left(a+b+c\right)=3ab$，得 $a^2+b^2-c^2=ab$，则由余弦定理有 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$

．又 $C\in\left(0,\pi\right)$，所以 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．由正弦定理得 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，解得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $b<c$，$B\in\left(0,\pi\right)$

，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$．

16．①②③　由题设 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，其图象关于原点中心对称，又对定义域内的任意 x 都有

$f\left(1+x\right)=-f\left(1-x\right)$，所以其图象还关于点 $\left(1,0\right)$ 对称，据此可判断函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数，2 是函数

$f\left(x\right)$ 的周期．又当 $x\in\left(1,2\right)$ 时，$f\left(x\right)=1-\log_2 x$，画出函数图象可知①②正确，④错误．

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$2-x\in\left(1,2\right)$，所以 $f\left(2-x\right)=1-\log_2\left(2-x\right)$，又因为函数 $f\left(x\right)$ 是以 2 为周期的奇函

数，所以 $f\left(2-x\right)=f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)=-f\left(2-x\right)=\log_2\left(2-x\right)-1$，所以③也正确．

17．解：（1）因为 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+1\right)$，所以 $S_n=\dfrac{n}{2}\left(a_n+1\right)$．

所以当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{n-1}{2}\left(a_{n-1}+1\right)$．

两式相减，得 $2a_n=na_n+n-\left(n-1\right)a_{n-1}-\left(n-1\right)$，

即 $\left(n-2\right)a_n=\left(n-1\right)a_{n-1}-1$．

所以 $\left(n-1\right)a_{n+1}=na_n-1$．

相减得 $\left(n-1\right)a_{n+1}-\left(n-2\right)a_n=na_n-\left(n-1\right)a_{n-1}$，

即 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$．

所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

当n=1时，$a_1=\frac{1}{2}(a_1+1)$，解得$a_1=1$.

所以公差$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=1$.

所以$a_n=1+(n-1)=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）$b_n=(-1)^n a_n^2=(-1)^n\times n^2$，

当n为奇数时，$T_n=-1^2+2^2-3^2+\cdots+(-1)\times n^2=[1+2+\cdots+(n-1)]-n^2=-\frac{n^2+n}{2}$；

当n为偶数时，$T_n=-1^2+2^2-3^2+\cdots+n^2=1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}-\frac{n^2+n}{2},n\in\mathbf{N}^*\text{且}n\text{是奇数},\\ \frac{n^2+n}{2},n\in\mathbf{N}^*\text{且}n\text{是偶数}.\end{cases}$

18.（1）证明：连接BD，由底面$ABCD$是正方形，可得$AC\perp BD$.

∵$SD\perp$平面$ABCD$，∴$SD\perp AC$，又$SD\cap BD=D$，∴$AC\perp$平面SBD.

∵ $BE\subset$平面SBD，∴$AC\perp BE$.

（2）解：设点B到平面ACE的距离为h.

$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=a^2$，

故三棱锥$E-ABC$的体积$V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times DE=\frac{1}{3}\times a^2\times\lambda a=\frac{\lambda}{3}a^3$.

$AE=CE=\sqrt{2a^2+\lambda^2a^2}$，

$\triangle AEC$的面积$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times AC\times\sqrt{AE^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{a^2+\lambda^2a^2}=a^2\sqrt{1+\lambda^2}$，

故三棱锥$B-AEC$的体积$V_{B-AEC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AEC}\times h=\frac{1}{3}\times a^2h\sqrt{1+\lambda^2}$.

由$V_{E-ABC}=V_{B-AEC}$可得$\frac{\lambda}{3}a^3=\frac{1}{3}\times a^2h\sqrt{1+\lambda^2}$，解得$h=\frac{\lambda a}{\sqrt{1+\lambda^2}}$，又$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

$\therefore\frac{\lambda a}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，解得$\lambda=\sqrt{2}\in(0,2]$.

即实数λ的值为$\sqrt{2}$.

19．解：（1）完成 2×2 列联表如下：

	喜欢	不喜欢	总计
女生	15	5	20
男生	8	12	20
总计	23	17	40

将 $a=15$，$b=5$，$c=8$，$d=12$ 代入 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，得

$K^2=\dfrac{40(15\times12-8\times5)^2}{20\times20\times23\times17}\approx5.013>3.841$，故有 95%的把握认为“喜欢该活动项目与性别有关”.

（2）从 7200 人中按照分层抽样的方法随机抽取 6 人，则高一、高二、高三分别抽取的人数为 3，2，1.

记 3 名高一学生为 A_1，A_2，A_3，2 名高二学生为 B_1，B_2，1 名高三学生为 C_1，

抽取的全部结果为 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C_1)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C_1)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C_1)，(B_1,B_2)，(B_1,C_1)，(B_2,C_1)，共 15 种.

至少 1 人是高一的有 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C_1)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C_1)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C_1)，共 12 种.

所以至少 1 人是高一学生的概率为 $P=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.

20．解：（1）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}$.

欲证 $f(x)\le\dfrac{x}{2}$，即证 $\dfrac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}\le\dfrac{x}{2}$，

即证 $2\ln x-x^2+1\le0$．令 $h(x)=2\ln x-x^2+1$，

则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{x}$．当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

所以函数 $h(x)$ 的最大值为 $h(1)=0$，故 $h(x)\le0$，

所以 $f(x)\le\dfrac{x}{2}$.

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x-a}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，$x=\mathrm{e}^{1-a}$，当 $x>\mathrm{e}^{1-a}$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<\mathrm{e}^{1-a}$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{1-a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\mathrm{e}^{1-a},+\infty\right)$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)=\mathrm{e}^{a-1}$

. 由题意知 $\mathrm{e}^{a-1}<1$，$a-1<0$，$a<1$，

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

21.（1）解：由题意知，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a+c=2+\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，$b=1$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）证明：当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

当直线 AB 的方程为 $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=0$，即 $OA\perp OB$；

当直线 AB 的方程为 $x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=0$，即 $OA\perp OB$.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

因为直线 AB 与圆 O 相切，所以 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $m^2=\dfrac{4}{5}\left(1+k^2\right)$.

将直线 AB 的方程代入椭圆方程 $x^2+4y^2=4$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

则 $\Delta=(8km)^2-4\left(1+4k^2\right)\left(4m^2-4\right)=16\left(1+4k^2-m^2\right)>0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=k^2\cdot\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}+km\left(-\dfrac{8km}{1+4k^2}\right)+m^2$

$=\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}+\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}=\dfrac{5m^2-4k^2-4}{1+4k^2}=\dfrac{5\times\frac{4}{5}\left(1+k^2\right)-4k^2-4}{1+4k^2}=0$，

即 $OA\perp OB$.

综上所述，$OA\perp OB$.

22．解：（1）依题意，直线 l_1 的直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，直线 l_2 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$.

由 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$.

$\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

$\therefore x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$，即 $\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$，

$\therefore$曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\alpha,\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）.

（2）由 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6},\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\left|OA\right|=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+2\sin\dfrac{\pi}{6}=4$，

由 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3},\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\left|OB\right|=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，

又 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$，由余弦定理可得 $\left|AB\right|=2$，$\therefore\triangle AOB$ 的周长 $l=6+2\sqrt{3}$.

23．解：（1）不等式 $f\left(x\right)\le 2$ 即为 $\left|x-4\right|+\left|x-1\right|-3\le 2$，

$\therefore\begin{cases}x\le 1,\\ 2-2x\le 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<x<4,\\ 0\le 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge 4,\\ 2x-8\le 2,\end{cases}$

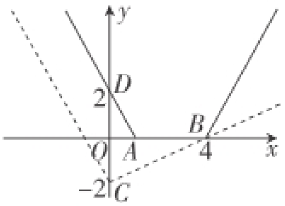
解得 $0\le x\le 1$ 或 $1<x<4$ 或 $4\le x\le 5$，

综上可得，$0\le x\le 5$，

$\therefore$不等式 $f\left(x\right)\le 2$ 的解集为 $\left\{x\middle|0\le x\le 5\right\}$.

（2）由（1）得 $f\left(x\right)=\left|x-4\right|+\left|x-1\right|-3=\begin{cases}2-2x,x\le 1,\\ 0,1<x<4,\\ 2x-8,x\ge 4,\end{cases}$

作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象，如图所示：



由于直线 $y=kx-2$ 过定点 $C\left(0,-2\right)$，

当此直线经过点 $B\left(4,0\right)$ 时，可得 $k=\dfrac{1}{2}$；当此直线与直线 AD 平行时，可得 $k=-2$.

结合图象可知，当直线 $y=kx-2$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的图象有公共点时，$k<-2$ 或 $k\geq\dfrac{1}{2}$.

故实数 k 的范围为 $\left(-\infty,-2\right)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.