# 2022年普通高校招生全国统一考试猜题压轴卷（A）

## 理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{x|-2\le x\le 1\}$，$B=\{x|(x-1)^2>1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$[-1,0)$　　B．$[-2,0)$　　C．$(0,1]$　　D．$(0,2]$

2．已知复数$z$在复平面内对应的点的坐标为$(-1,2)$，则$\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

A．$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

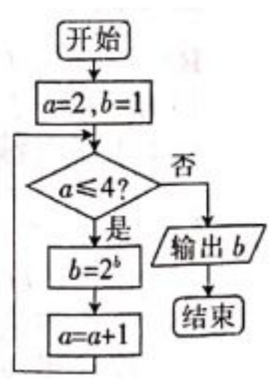
3．已知$2\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．2　　B．$-2$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

4．笔、墨、纸、砚是中国独有的文书工具，即文房四宝．“笔、墨、纸、砚”之名，起源于南北朝时期．历史上，“笔、墨、纸、砚”所指之物屡有变化．在宋朝时，“笔、墨、纸、砚”特指宣笔（安徽宣城）、徽墨（安徽徽州歙县）、宣纸（安徽宣城泾县）、歙砚（安徽徽州歙县）、洮砚（甘肃卓尼县）、端砚（广东肇庆，古称端州）。若从宋朝特指的六种文书工具中任取两种，则这两种恰好都是产自安徽的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

5．执行如图所示的程序框图，则输出$b$的值为（　　）




A．32　　B．16　　C．8　　D．4

6．若直线$l:3x+4y+a=0(a\in\mathbf{R})$与圆$O:x^2+y^2=9$交于不同的两点$A$、$B$，且$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则$a=$（　　）

A．$\pm5\sqrt{5}$　　B．$\pm3\sqrt{5}$　　C．$\pm2\sqrt{5}$　　D．$\pm5$

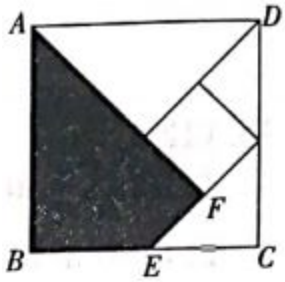
7．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=12$，点 $E$，$F$ 分别是 $AB$，$CD$ 的中点，沿 $EF$ 将四边形 $AEFD$ 折起，使 $\angle AEB=60^\circ$，若折起后点 $A$，$B$，$C$，$D$，$E$，$F$ 都在球 $O$ 的表面上，则球 0 的表面积为（　　）

A．$64\pi$　　B．$72\pi$　　C．$84\pi$　　D．$96\pi$

8．已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 $F$，点 $A\left(1,m\right)$ 为抛物线 $C$ 上的一点，且 $\left|AF\right|=\dfrac{5}{4}$，点 $B$ 是抛物线 $C$ 上异于点 $A$ 的一点，且 $A$，$F$，$B$ 三点共线，则 $\left|BF\right|=$（　　）

A．$\dfrac{5}{16}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{5}{8}$

9．七巧板是中国古代劳动人民发明的一种传统智力玩具，它由五块等腰直角三角形、一块正方形和一块平行四边形共七块板组成．（清）陆以湉《冷庐杂识》卷中写道：近又有七巧图，其式五，其数七，其变化之式多至千余，体物肖形，随手变幻，盖游戏之具，足以排闷破寂，故世俗皆喜为之．如图是一个用七巧板拼成的正方形 $ABCD$，若四边形 $ABEF$ 的面积为 7，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=$（　　）




A．$-4$　　B．$-4\sqrt{2}$　　C．$-2$　　D．$-2\sqrt{2}$

10．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2BC$，$M$，$N$ 分别为棱 $C_1D_1$，$CC_1$ 的中点，有以下判断：

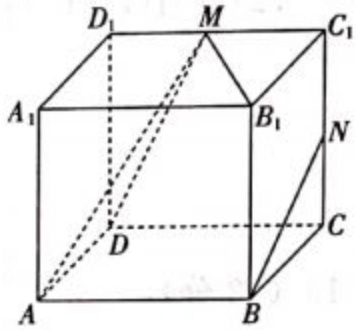
①$AM$，$NB$ 是异面直线；

②$BN$ // 平面 $ADM$；

③直线 $BN$ 与 $B_1M$ 所成角的大小为 60°；

④二面角 $M-AD-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$．

其中所有正确的判断是（　　）




A．①②　　B．①③　　C．①③④　　D．②④

11．已知函数 $f\left(x\right)=\cos\pi x$，若存在 $x_1,x_2\cdots,x_m$ 满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 5$，且 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{m-1}\right)-f\left(x_m\right)\right|=10(m\ge 2,m\in\mathbf{N}^*)$，则 $m$ 的最小值为（　　）

A．10　　B．8　　C．6　　D．5

12．已知正方形的四个顶点都在函数 $y=f\left(x\right)$ 图象上，且函数 $y=f\left(x\right)$ 图象上的点 $\left(x,y\right)$ 都满足 $\left(x^3-4x-y\right)^{2021}+x^{2021}+x^3-3x-y=0$，则这样的正方形最多有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．**

13．$\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中的 $x$ 的系数是______．

14．设函数 $f\left(x\right)=ae^x+e^{-x}$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线经过点 $\left(1,1\right)$，则实数 $a=$______．

15．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，过 $F_1$ 作斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 $l$ 与双曲线 $C$ 的左、右两支分别交于 $A$，$B$ 两点，且 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|$，则双曲线 $C$ 的离心率为______．

16．在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $2c\cos B=2a+b$，若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}c$，则 $ab$ 的最小值为______．

**三解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共 60 分．**

17．（12 分）

在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_3=3$，数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+1\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

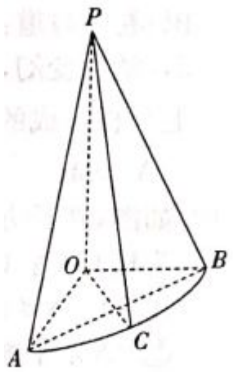
（2）若 $b_n=\left(-1\right)^n a_n^2$，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$．

18．（12 分）

如图，在直角 $\triangle POA$ 中，$PO\perp OA$，$PO=2OA$，将 $\triangle POA$ 绕边 $PO$ 旋转到 $\triangle POB$ 的位置，使 $\angle AOB=90°$，得到圆锥的一部分，点 $C$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点．

（1）求证：$PC\perp AB$；

（2）设直线 $PC$ 与平面 $PAB$ 所成的角为 $\varphi$，求 $\sin\varphi$．




19．（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 经过两点 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 和 $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（1）求椭圆 $C$ 的方程；

（2）设直线 $l$ 经过椭圆 $C$ 的右焦点 $F$，且与椭圆 $C$ 交于不同的两点 $A$，$B$，在 $x$ 轴上是否存在点 $Q$，使得直线 $QA$ 与直线 $QB$ 的斜率的和为定值？若存在，请求出点 $Q$ 的坐标；若不存在，请说明理由.

20．（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x+a}{x}$.

（1）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，证明：$f\left(x\right)\le\frac{x}{2}$；

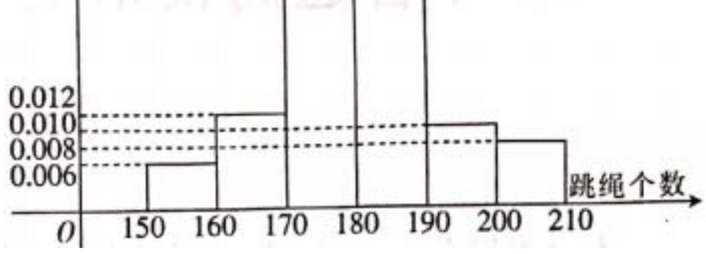
（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象恒在直线 $y=1$ 的下方，求实数 $a$ 的取值范围.

21．（12 分）

为了贯彻落实健康第一的指导思想，切实加强学校体育工作，促进学生积极参加体育锻炼，养成良好的锻炼习惯，提高体质健康水平，某学校决定学习外校经验在本校推广跳绳运动．为掌握学生 1 分钟的跳绳情况，按照男女比例利用分层抽样抽取了 100 名学生进行计分测试，得到如图所示的频率分布直方图，计分规则如表 1：

表 1

| 每分钟跳绳个数 | $[150,160)$ | $[160,170)$ | $[170,180)$ | $[180,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| 得分 | 7 | 8 | 9 | 10 |




（1）规定：学生 1 分钟跳绳得分 10 分为满分，在抽取的 100 名学生中，其中女生有 54 人，男生跳绳个数大于等于 180 的有 26 人，根据已知条件完成表 2，并根据这 100 名学生的测试成绩，判断能否有 95%的把握认

为学生 1 分钟跳绳成绩满分与性别有关.

表 2

| 跳绳个数 | $\geq 180$ | $<180$ | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | 26 | | |
| 女生 | | | 54 |
| 总计 | | | 100 |

附：

参考公式 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$ .

临界值表：

| $P(K^2\geq k_0)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

（2）根据外校往年经验，学生经过一年的训练，每人每分钟跳绳个数都有明显进步．假设经过一年训练后，每人每分钟跳绳个数比开始时个数增加 10，全年级恰有 2000 名学生，所有学生的跳绳个数 $X$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（用样本数据的平均值和方差估计总体的期望和方差，各组数据用中点值代替）.

①估计经过一年训练后，1 分钟跳绳个数在 $(203,216]$ 内的人数；（结果四舍五入到整数）

②若在经过一年训练后，发现①中的数据是正确的，且其中有 136 人是男同学，现按照男女比例利用分层抽样抽取 6 名 1 分钟跳绳个数在 $(203,216]$ 内的同学，并在这 6 名同学中抽取 3 人，记男同学的人数为 $\xi$，求 $\xi$ 的分布列.

附：若随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leq\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leq\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X\leq\mu+3\sigma)\approx 0.9973$ .

参考数据：标准差 $\sigma\approx 13$ .

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分.**

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta$，直线 $l_1:\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$，直线 $l_2:\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$．以极点 $O$ 为原点，极轴为 $x$ 轴的正半轴建立平面直角坐标系，

（1）求直线 $l_1$，$l_2$ 的直角坐标方程以及曲线 $C$ 的参数方程；

（2）已知直线 $l_1$ 与曲线 $C$ 交于 $O$，$A$ 两点，直线 $l_2$ 与曲线 $C$ 交于 $O$，$B$ 两点，求 $\triangle AOB$ 的周长.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-4|+|x-1|-3$ .

（1）求不等式 $f\left(x\right)\le 2$ 的解集；

（2）若直线 $y=kx-2$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的图象有公共点，求实数 $k$ 的取值范围.

# 2022年普通高校招生全国统一考试猜题压轴卷

## 理科数学参考答案、提示及评分细则

**（A）**

1．B　易知 $B=\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$，故 $A\cap B=\left[-2,0\right)$． 

2．D　由题意知复数 $z=-1+2\mathrm{i}$，则 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{\left(-1+2\mathrm{i}\right)\cdot\left(1-\mathrm{i}\right)}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$．

3．A　由 $2\cos\left(\pi+a\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)$，可得 $-2\cos a=-\sin a$，所以 $\tan a=2$．

4．C　由题意可知宋朝“笔、墨、纸、砚”有 6 种，其中 4 种产自安徽，从 6 种当中选 2 种，共有 15 种情况，且每种情况发生的概率相同，其中两种全部来自安徽的情况共有 6 种，所以所求概率为 $P=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$．

5．B　当 $a=2$ 时，进入循环，$b=2$，$a=3$；当 $a=3$ 时，再次进入循环，$b=2^2=4$，$a=4$；当 $a=4$ 时，再次进入循环，$b=2^4=16$，$a=5$．所以当 $a=5$ 时应跳出循环，故输出 $b$ 的值为 16.

6．A　设圆心 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $d$，由 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 知 $d=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|$．又由垂径定理可知 $d^2=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{4}=9$，故 $d=\sqrt{5}$，即 $\dfrac{\left|0+0+a\right|}{5}=\sqrt{5}$，故 $a=\pm5\sqrt{5}$．

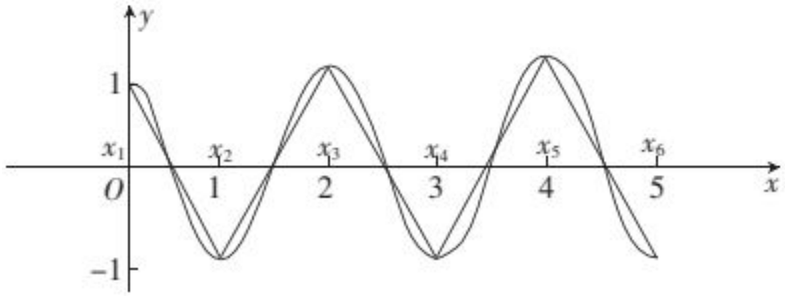
7．C　易得 $\triangle ABE$，$\triangle DCF$ 都是边长为 6 的正三角形，设 $\triangle ABE$ 的中心为 $O_1$，$\triangle DCF$ 的中心为 $O_2$，则球心 $O$ 为线段 $O_1O_2$ 的中点，易求得 $O_1A=2\sqrt{3}$，$OO_1=3$，所以球 $O$ 的半径 $OA=\sqrt{O_1A^2+OO_1^2}=\sqrt{21}$，所以球 $O$ 的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=84\pi$．

8．A　由 $\left|AF\right|=x_A+\dfrac{p}{2}=1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5}{4}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$．则抛物线 $C:y^2=x$，$A\left(1,1\right)$，$F\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，设 $B\left(b^2,b\right)$，因为 $A,F,B$ 三点共线，所以 $\dfrac{1-0}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{b-0}{b^2-\dfrac{1}{4}}$，解得 $b=-\dfrac{1}{4}$（$b=1$ 舍去），故 $B\left(\dfrac{1}{16},-\dfrac{1}{4}\right)$，$\left|BF\right|=\dfrac{1}{16}+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5}{16}$．

9．C　　设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a$，则阴影部分面积 $S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{7a^2}{16}=7$，所以 $a=4$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=\sqrt{2}\times 2\cos 135^\circ=-2$．

10．B　　由图易得 $AM$，$BN$ 是异面直线，故①正确；$BN$ // 平面 $AA_1D_1D$，显然 $BN$ 与平面 $ADM$ 不平行，故②错误；取 $CD$ 的中点 $O$，连接 $BO$，$ON$，可知三角形 $BON$ 为等边三角形，故③正确；由题意知 $AD\perp$ 平面 $CDD_1C_1$，故二面角 $M-AD-C$ 的平面角为 $\angle MDC$，而 $\tan\angle MDC=2$，故④错误．

11．C　　$\because y=\cos\pi x$ 对任意 $x_i,x_j\left(i,j=1,2,3,\cdots,m\right)$，都有 $\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_j\right)\right|\le f\left(x\right)_{\max}-f\left(x\right)_{\min}=2$，要使 $m$ 取得最小值，尽可能让 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,m\right)$ 取得最值点，考虑 $0\le x<x^2<\cdots<x_m\le 5$，$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{m-1}\right)-f\left(x_m\right)\right|=10$，按下图取值可满足条件，$\therefore m$ 的最小值为 6．



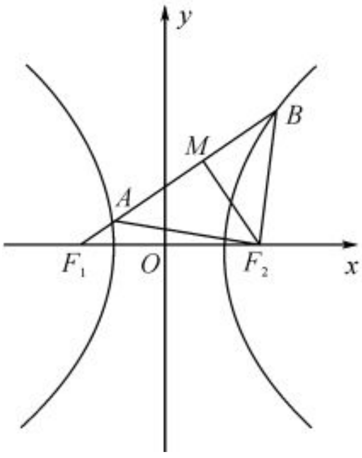

12．B　　设函数 $g\left(t\right)=t^{2021}+t$，则函数 $g\left(t\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．由已知可得 $g\left(x^3-4x-y\right)+g\left(x\right)=\left(x^3-4x-y\right)^{2021}+x^{2021}+x^3-3x-y=0$，所以 $g\left(x^3-4x-y\right)=-g\left(x\right)=g\left(-x\right)$，所以 $x^3-4x-y=-x$，即 $y=x^3-3x$，其对称中心为原点 $O$，所以正方形的中心为原点 $O$．设正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 所在的直线为 $y=kx\left(k\ne 0\right)$，由 $\begin{cases}y=kx,\\ y=x^3-3x,\end{cases}$ 得 $x^2=k+3$，所以 $AO^2=x^2+y^2=\left(1+k^2\right)x^2=\left(1+k^2\right)\left(k+3\right)$，同理可得 $BO^2=\left(1+k^2\right)\left(\frac{3}{k^2}-\frac{1}{k^3}\right)$，由 $AO^2=BO^2$，得 $k+3=\frac{3}{k^2}-\frac{1}{k^3}$，即 $k^2+\frac{1}{k^2}+3\left(k-\frac{1}{k}\right)=0$．令 $k-\frac{1}{k}=m$，则 $m^2+3m+2=0$，所以 $m=-1$ 或 $m=-2$，所以这样的正方形最多有 2 个．

13．280 二项式 $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式的通项是 $T_{r+1}=C_7^r\left(2x\right)^{7-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_7^r\left(-1\right)^r2^{7-r}\cdot x^{7-\frac{3}{2}r}$，令

$7-\frac{3}{2}r=1$，解得 $r=4$．故 $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中的 $x$ 的系数是 $C_7^4\left(-1\right)^4 2^{7-4}=280$．

14．$\frac{1}{2}$　$f'\left(x\right)=ae^x-e^{-x}$，$f'\left(0\right)=a-1$，又 $f\left(0\right)=a+1$，所以函数 $f\left(x\right)=ae^x+e^{-x}$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-\left(a+1\right)=\left(a-1\right)x$，把点 $\left(1,1\right)$ 代入可得 $a=\frac{1}{2}$．

15．$\sqrt{2}$　如图，因为 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|$，则取 $AB$ 中点 $M$，连接 $F_2M$，可得 $F_2M\perp AB$，设 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|=x$，因为 $\left|AF_2\right|-\left|AF_1\right|=2a$，则 $\left|AF_1\right|=x-2a$，又因为 $\left|BF_1\right|-\left|BF_2\right|=2a$，则 $\left|BF_1\right|=x+2a$，$\left|AB\right|=\left|BF_1\right|-\left|AF_1\right|=4a$，则 $\left|AM\right|=\left|BM\right|=2a$．则 $\left|F_1M\right|=x$．在 $Rt\triangle F_1F_2M$ 中，$\left|F_2M\right|=\sqrt{4c^2-x^2}$，在 $Rt\triangle AF_2M$ 中，$\left|F_2M\right|=\sqrt{x^2-4a^2}$，所以 $\sqrt{4c^2-x^2}=\sqrt{x^2-4a^2}$，解得 $x^2=2a^2+2c^2$．因为直线 $l$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\frac{\left|F_2M\right|}{\left|F_1M\right|}=\frac{\sqrt{2c^2-2a^2}}{\sqrt{2a^2+2c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{3}$，$c^2=2a^2$，所以离心率 $e=\sqrt{2}$．





16．48　因为 $2c\cos B=2a+b$，由余弦定理得 $2c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2a+b$，整理得 $a^2+b^2-c^2=-ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$．又因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$，因为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}c$，所以 $ab=4c$．由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $\frac{(ab)^2}{16}=a^2+b^2+ab$．因为 $a^2+b^2\geq 2ab$，所以 $\frac{(ab)^2}{16}-ab\geq 2ab$，解得 $ab\geq 48$．当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $ab$ 的最小值为 48.

17．解：（1）因为 $\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\left(a_n+1\right)$，所以 $S_n=\frac{n}{2}\left(a_n+1\right)$．

所以当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{n-1}{2}\left(a_{n-1}+1\right)$．

两式相减，得 $2a_n = na_n + n-(n-1)_a n-1-(n-1)$，

即 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1}-1$.

所以 $(n-1)a_{n+1} = na_n - 1$.

相减得 $(n-1)a_{n+1}-(n-2)a_n = na_n-(n-1)a_{n-1}$，

即 $2a_n = a_{n-1}+a_{n+1}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

当 $n=1$ 时，$a_1 = \frac{1}{2}(a_1+1)$，解得 $a_1 = 1$.

所以公差 $d = \frac{a_3 - a_1}{3-1} = 1$.

所以 $a_n = 1+(n-1) = n\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$.

（2）$b_n = (-1)^n a_n^2 = (-1)^n \times n^2$，

当 $n$ 为奇数时，$T_n = -1^2+2^2-3^2+\cdots+(-1)\times n^2 = \left[1+2+\cdots+(n-1)\right]-n^2 = -\frac{n^2+n}{2}$；

当 $n$ 为偶数时，$T_n = -1^2+2^2-3^2+\cdots+n^2 = 1+2+\cdots+n = \frac{n^2+n}{2}$.

综上所述，$T_n = \begin{cases} -\frac{n^2+n}{2}, n\in \mathbf{N}^* 且n是奇数, \\ \frac{n^2+n}{2}, n\in \mathbf{N}^* 且n是偶数. \end{cases}$

18.（1）证明：由题意知 $PO\perp$ 平面 $AOB$，所以 $PO\perp A$B.

又点 $C$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以 $OC\perp AB$，$PO\cap OC=0$，所以 $AB\perp$ 平面 $POC$，

又 $PC\subset$ 平面 $POC$，所以 $PC\perp A$B.

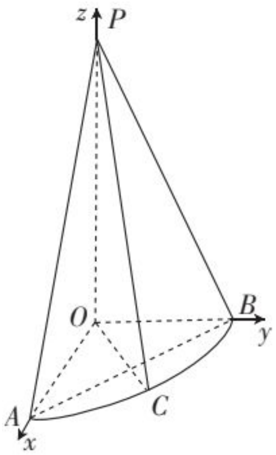
（2）解：以 $O$ 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别作为 $x$，$y$，$z$ 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，设 $OA=2$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$P(0,0,4)$，$C\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-4\right)$.

设平面 $PAB$ 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a+2b=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2a+4c=0, \end{cases}$ 取 $c=1$，可得平面 $PAB$ 的一个法向量为

$\vec{n}=\left(2,2,1\right)$，

所以 $\sin\varphi=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PC}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\dfrac{4\sqrt{2}-4}{6\sqrt{5}}=\dfrac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)}{15}$ .




19．解：（1）由题意，知 $\begin{cases}\dfrac{\left(-1\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ .

（2）若存在满足条件的点 $Q\left(t,0\right)$ . 

当直线 $l$ 的斜率 $k$ 存在时，设直线 $l$ 的方程是 $y=k\left(x-1\right)$，联立 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

消去 $y$ 得 $\left(3+4k^2\right)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$ .

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$

$\because k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=\dfrac{k\left(x_1-1\right)\left(x_2-t\right)+k\left(x_2-1\right)\left(x_1-t\right)}{\left(x_1-t\right)\left(x_2-t\right)}$

$$=\frac{2kx_1x_2-k(1+t)(x_1+x_2)+2kt}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}=k\cdot\frac{\frac{8k^2-24}{3+4k^2}-\frac{8k^2(1+t)}{3+4k^2}+2t}{\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2}{3+4k^2}t+t^2}$$

$$=k\cdot\frac{8k^2-24-8k^2(1+t)+2t(3+4k^2)}{4k^2-12-8k^2t+t^2(3+4k^2)}=\frac{6k(t-4)}{4(t-1)^2k^2+3(t^2-4)},$$

∴要使对任意实数$k,k_{QA}+k_{QB}$为定值，则只有$t=4$，此时，$k_{QA}+k_{QB}=0$.

当直线$l$与$x$轴垂直时，若$t=4$，也有$k_{QA}+k_{QB}=0$.

故在$x$轴上存在点$Q(4,0)$，使得直线$QA$与直线$QB$的斜率的和为定值0.

20．解：（1）当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}$.

欲证$f(x)\le\frac{x}{2}$，即证$\frac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}\le\frac{x}{2}$，

即证$2\ln x-x^2+1\le 0$．令$h(x)=2\ln x-x^2+1$，

则$h'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{-2(x-1)(x+1)}{x}$．当$x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，

所以函数$h(x)$的最大值为$h(1)=0$，故$h(x)\le 0$，

所以$f(x)\le\frac{x}{2}$.

（2）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x-a}{x^2}$，

令$f'(x)=0$，$x=e^{1-a}$，当时$x>e^{1-a}$，$f'(x)<0$，当$0<x<e^{1-a}$时，$f'(x)>0$，

所以函数$f(x)$在$(0,e^{1-a})$上单调递增，在$(e^{1-a},+\infty)$上单调递减，函数$f(x)$的最大值为$f(e^{1-a})=e^{a-1}$．由题意知$e^{a-1}<1$，$a-1<0$，$a<1$，即实数$a$的取值范围是$(-\infty,1)$.

21．解：（1）在抽取的100人中，满分的总人数为$100\times(0.030+0.010+0.008)\times10=48$，

男生满分的有26人，所以女生满分的有22人，

男生共有46人，女生共有54人，所以男生跳绳个数不足180的有$46-26=20$人，女生跳绳个数不足180的有$54-22=32$人，



完成的表2如下表所示：

| 跳绳个数 | $\ge180$ | $<180$ | 总计 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 男生 | 26 | 20 | 46 |
| 女生 | 22 | 32 | 54 |
| 总计 | 48 | 52 | 100 |

由公式可得$K^2=\dfrac{100\left(26\times32-22\times20\right)^2}{48\times52\times46\times54}\approx2.478$，因为$2.478<3.841$，

所以没有 95%的把握认为学生 1 分钟跳绳成绩满分与性别有关.

（2）①根据频率分布直方图可得训练前的跳绳个数的平均数为$\bar{x}=155\times0.06+165\times0.12+175\times0.34+185\times0.3+195\times0.1+205\times0.08=180$，

而$\sigma\approx13$，所以经过一年训练后，$\mu=180+10=190$，故$X$服从正态分布$N\left(190,13^2\right)$，

且$\mu+\sigma=203$，$\mu-\sigma=177$，$\mu+2\sigma=216$，$\mu-2\sigma=164$，

则$P\left(203<X\le216\right)=\dfrac{1}{2}\left[P\left(164\le X\le216\right)-P\left(177\le\xi\le203\right)\right]\approx0.1359$，

所以$2000\times0.1359=271.8\approx272$，故经过一年训练后，1 分钟跳绳个数在$\left(203,216\right]$内的人数约为 272.

②由①知，总人数为 272，男同学有 136 人，故抽取的 6 人中应该为 3 男 3 女.

那么$P\left(\xi=0\right)=\dfrac{C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$，$P\left(\xi=1\right)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$，$P\left(\xi=2\right)=\dfrac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$，$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$，

则$\xi$的分布列为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{20}$ | $\dfrac{9}{20}$ | $\dfrac{9}{20}$ | $\dfrac{1}{20}$ |

22．解：（1）依题意，直线$l_1$的直角坐标方程为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，直线$l_2$的直角坐标方程为$y=\sqrt{3}x$.

由$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta$，得$\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$.

$\because\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

$\therefore x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$，即$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$，

曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\alpha,\\y=1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）.

（2）由$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3},\\\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}$得$|OA|=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+2\sin\dfrac{\pi}{6}=4$，

由$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3},\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}$得$|OB|=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，

又$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$，由余弦定理可得$|AB|=2$，$\therefore\triangle AOB$的周长$l=6+2\sqrt{3}$.

23．解：（1）不等式$f(x)\le 2$即为$|x-4|+|x-1|-3\le 2$，

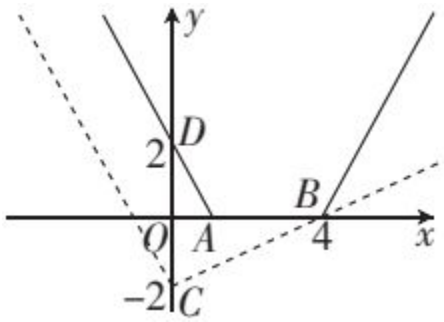
$\therefore\begin{cases}x\le 1,\\ 2-2x\le 2\end{cases}$或$\begin{cases}1<x<4,\\ 0\le 2\end{cases}$或$\begin{cases}x\ge 4,\\ 2x-8\le 2,\end{cases}$

解得$0\le x\le 1$或$1<x<4$或$4\le x\le 5$，综上可得$0\le x\le 5$，

$\therefore$不等式$f(x)\le 2$的解集为$\{x|0\le x\le 5\}$.

（2）由（1）得$f(x)=|x-4|+|x-1|-3=\begin{cases}2-2x,x\le 1,\\ 0,1<x<4,\\ 2x-8,x\ge 4,\end{cases}$

作出函数$f(x)$的图象，如图所示：




由于直线$y=kx-2$过定点$C(0,-2)$，

当此直线经过点$B(4,0)$时，可得$k=\dfrac{1}{2}$；当此直线与直线$AD$平行时，可得$k=-2$.

结合图象可知，当直线$y=kx-2$与函数$f(x)$的图象有公共点时，$k<-2$或$k\ge\dfrac{1}{2}$.

故实数$k$的范围为$(-\infty,-2)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.