2022 年猿辅导高考数学模拟试卷（文）

一、选择题。(共 60 分)

本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x-1>0\}$，$B=\{x\in \mathrm{Z}|x\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $[1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 复数 $\dfrac{1-6\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$ 在复平面内所对应的点位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 $\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)=\sqrt{2}$，则 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=$ (　　)

A. 2　　B. -2　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

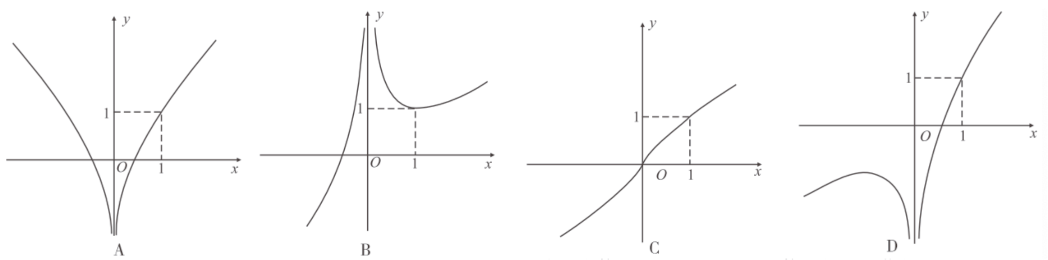
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_4=a_5-1$，则 $a_6=$ (　　)

A. 27　　B. 32　　C. 64　　D. 81

6. 函数 $f(x)=x+\ln|x|$ 的图象大致是 (　　)



7. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为 $1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（　）

A. 3π　　B. 4π　　C. 9π　　D. 12π

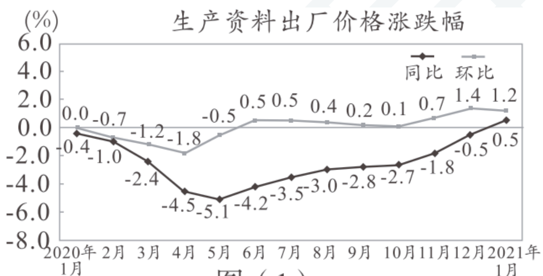
8. 下图是国家统计局发布的生产资料出厂价格涨跌幅以及生活资料出厂价格涨跌幅的统计图．现有如下说法：

① 2020 年下半年生产资料的出厂价格的环比涨幅呈现上升趋势.

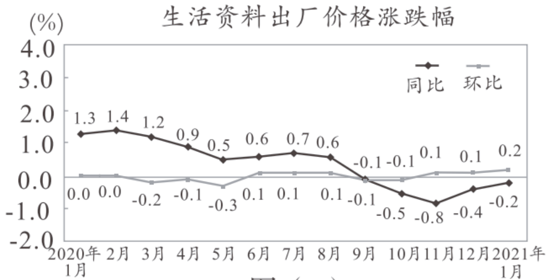
②可以预测，在市场平稳的前提下，2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为正数.

③将 2020 年 1 月 ~2021 年 1 月生产资料出厂价格的同比涨跌幅从小到大排列后，所得的中位数为 0.2%.

则错误的个数为（　）



图（1）



图（2）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x-4, & x\leqslant -1\\ \ln(x+1), & x>-1\end{cases}$，若 $f(f(x))<0$，则 x 的取值范围为（　）

A. $(-2,0)$　　B. $(-\infty,\frac{1}{e^2}-1)$

C. $(-2,\frac{1}{e^2}-1)$　　D. $(-2,-1)\cup(\frac{1}{e^2}-1,0)$

10. 过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）焦点的直线与抛物线 C 交于 A、B 两点，其中 $|AB|=8$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，圆 C'：$x^2+y^2-\frac{5}{2}y=0$，若抛物线 C 与圆 C' 交于 P、Q 两点，且 $|PQ|=\sqrt{5}$，则点 D 的横坐标为（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

11. 关于函数 $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$，下列结论正确的是（　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$　　B. $f(x)$ 的最大值为 2

C. $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递减　　D. $x=\frac{\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴

12. 若函数 $f(x)=\ln x-x^2+ax$ 在 $x\in[\frac{1}{e},e]$ 上有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $(1,e-\frac{1}{e})$　　B. $(1,e+\frac{1}{e})$　　C. $(1,e-\frac{1}{e}]$　　D. $(1,e+\frac{1}{e}]$

二、填空题。（共 20 分）

本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将正确的答案填在相应的横线上。

13. 已知 $\begin{cases} x+y\geqslant 2, \\ y\geqslant 0, \\ x+2y-3\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=y-2x$ 的最大值为____.

14. 设平面向量 $\vec{a}=(1,-1)$，$\vec{b}=(-1,2)$，$\vec{c}=(2,3)$，则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=$____.

15. $(x^3-\frac{1}{x})^4$ 的展开式中常数项是____.

16. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别是 F_1、F_2，点 A 在双曲线上，且 $AF_2\perp x$ 轴，若点 $B(3c,0)$ 使得 $\angle F_1AB=90°$，其中 c 为双曲线 C 的半焦距，则双曲线 C 的离心率为____.

三、计算题。（共 80 分）

本大题共 7 小题，其中 17-21 是必做题，每小题 12 分，22-23 是选做题，每小题 10 分。根据题目要求，写出文字说明、证明过程或演算步骤。请在 22,23 两题中任选一题作答。如果多选，则按所做的第一题计分。

17. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$，$a_1=1$.

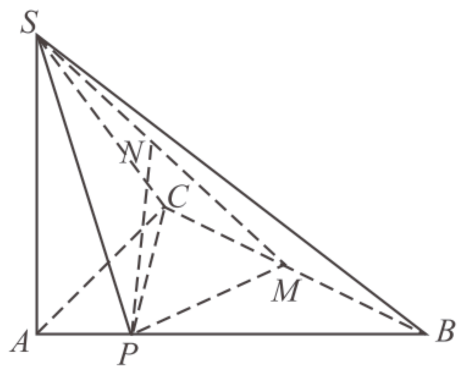
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）设 $b_n=\dfrac{2a_n+3}{a_{n+1}^2a_{n+2}^2}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$\dfrac{5}{36}\leqslant S_n<\dfrac{1}{4}$.

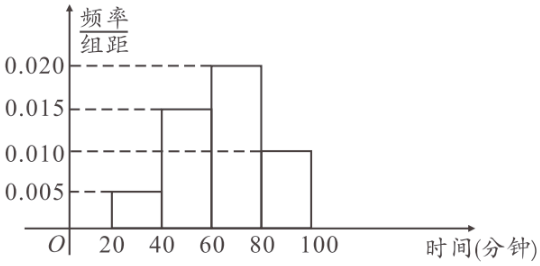
18. 如图，三棱锥 $S-ABC$ 中，点 S 在平面 ABC 的投影为点 A，$BC=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$\angle CBA=45°$，点 M、N 分别是线段 BC、SM 的中点，点 P 在线段 AB 上.

（1）若 $AP=BP$，求证：$CP\perp SB$.

（2）若 $SA=2$，$PN//$ 平面 SAC，求四面体 $SCMP$ 的体积.



19. 随着工作压力的增大，很多家长下班后要么加班，要么抱着手机，陪伴孩子的时间逐渐减少，为了调查 A 地区家长陪伴孩子的时间，研究人员对 200 名家长一天陪伴孩子的时间进行统计，所得数据统计如图所示.



（1）求这 200 名家长陪伴孩子的平均时间（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）.

（2）若按照分层抽样的方法从陪伴时间在 $[40,80)$ 的家长中随机抽取 7 人，再从 7 人中随机抽取 2 人，求至少有 1 人陪伴孩子的时间在 $[60,80)$ 的概率.

（3）为了研究陪伴时间的多少与家长的性别是否具有相关性，研究人员作出统计如下表所示，判断是否有 99% 的把握认为陪伴时间的多少与家长的性别有关.

	男性	女性
陪伴时间少于 60 分钟	50	30
陪伴时间不少于 60 分钟	50	70

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

20. 已知函数 $f(x)=-\frac{4}{3}x^{3}+(a+1)x^{2}-ax$.

（1）若 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上有极值，求 a 的取值范围.

（2）求证：当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切.

21. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点 N，长轴长为 $4\sqrt{2}$，P 为椭圆上一点，O 为坐标原点，且 $\triangle OPN$ 重心的横坐标为 $\sqrt{2}$，$\triangle OPN$ 的面积为 $\sqrt{6}$.

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，以 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OAMB$，且 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，试判断 $|OM|^2+|AB|^2$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，$A(2,\dfrac{\pi}{6})$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程以及直线 l 的普通方程.

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 M、N 两点，求 $\triangle AMN$ 的面积.

23. 已知函数 $f(x)=|x-1|-2|x-2|$ 的最大值为 t.

（1）求 t 的值.

（2）设 a、b、c 均为正实数，且满足 $2a+b+2c=3t$，求证：$a^2+b^2+c^2 \geqslant t$.

参考答案与解析

一、选择题

1. 【答案】C

【解析】本题主要考查集合的运算.

由题意 $A=\{x|x-1>0\}=(1,+\infty)$，$B=\{x\in\mathbb{Z}|x\leqslant 3\}=\{\cdots,0,1,2,3\}$，

所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

故本题正确答案为 C.

2. 【答案】D

【解析】本题主要考查复数的四则运算.

由题意 $\dfrac{1-6\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-6\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}=\dfrac{15-16\mathrm{i}}{13}$，

其在复平面内对应的点为 $\left(\dfrac{15}{13},-\dfrac{16}{13}\right)$，在第四象限.

故本题正确答案为 D.

3. 【答案】A

【解析】本题主要考查三角函数.

由题意 $\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)=-\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$，

所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=2$.

故本题正确答案为 A.

4. 【答案】A

【解析】本题主要考查正弦定理与余弦定理.

因为 $\cos C=\dfrac{BC^2+AC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\dfrac{2}{3}$，

所以 $AB=\sqrt{BC^2+AC^2-(\frac{2}{3}\times 2\cdot AC\cdot BC)}$

$=\sqrt{9+16-\frac{2}{3}\times 2\times 4\times 3}$

$=\sqrt{9+16-16}$

$=3.$

又因为 $\cos B=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AB}$

$=\frac{9+9-16}{2\times 3\times 3}$

$=\frac{1}{9}.$

故本题正确答案为 A.

5. **【答案】** B

【解析】 本题主要考查等比数列.

设各项均为正数的等比数列的公比为 q（$q>0$），

若 $q=1$，则 $S_4+1=4a_1+1=5\neq a_5$，不符合题意，

所以 $q\neq 1$，

所以 $S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_5-1=a_1q^4-1$，

所以 $\frac{1-q^4}{1-q}=q^4-1$，

所以 $1-q=-1$，

所以 $q=2$，

所以 $a_6=a_1q^5=2^5=32.$

故本题正确答案为 B.

6. **【答案】** D

【解析】 本题主要考查函数的概念与性质.

因为 $f(x)=x+\ln|x|$，$f(-x)=-x+\ln|x|$，

所以 $f(x)\neq f(-x)$，$f(x)+f(-x)\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 既不是偶函数，也不是奇函数，

所以函数 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称，也不关于坐标原点对称，

所以排除 A 项，C 项.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$ 单调递增，

所以排除 B 项.

故本题正确答案为 D.

7. 【答案】B

【解析】本题主要考查空间几何体.

由球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32}{3}\pi$ 得出 $r=2$.

根据题意假设横截面是半径为 $\sqrt{3}$ 的小圆，则两个圆锥的高分别是 1 和 3.

所以两圆锥的体积之和为 $\frac{1}{3}\times\pi\times\sqrt{3}^2\times1+\frac{1}{3}\times\pi\times\sqrt{3}^2\times3=4\pi$.

故本题正确答案为 B.

8. 【答案】C

【解析】本题主要考查事件与概率和随机抽样.

①项，根据图（1）可知，2020 年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降再上升.

故①项错误.

②项，根据图（2）可知，生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差价介于 $-0.2\%\sim0.4\%$ 之间，

因为 2021 年 1 月环比的涨幅为 0.2%，

所以可以预测在市场平稳的前提下，2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为整数.

故②项正确.

③项，根据中位数的定义可知，2020 年 1 月 ~2021 年 1 月生产资料出厂价格的同比涨跌幅的中位数为 -2.7%.

故③项错误.

所以错误的说法有①③，个数为 2.

故本题正确答案为 C.

9. 【答案】D

【解析】本题主要考查函数的概念与性质.

首先求解不等式 $f(x)<0$ 的解集：

当 $x\leqslant-1$ 时，解 $f(x)<0$ 得到 $(\frac{1}{2})^x-4<0$，

所以 $(\frac{1}{2})^x<4$，

所以 $x>-2$，

所以 $-2<x\leqslant-1$.

当 $x>-1$ 时，解 $f(x)<0$ 得到 $\ln(x+1)<0$，

所以 $-1<x<0$.

所以不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-2,0)$.

因为 $f(f(x))<0$，

所以 $-2<f(x)<0$.

①当 $x\leqslant-1$ 时，解 $-2<f(x)<0$ 得到 $-2<(\frac{1}{2})^x-4<0$，

所以 $2<(\frac{1}{2})^x<4$，

所以 $-2<x<-1$.

②当 $x>-1$ 时，解 $-2<f(x)<0$ 得到 $-2<\ln(x+1)<0$，

所以 $\frac{1}{e^2}<x+1<1$，

所以 $\frac{1}{e^2}-1<x<0$.

综上所述，不等式 $f(f(x))<0$ 的解集为 $(-2,-1)\cup(\frac{1}{e^2}-1,0)$.

故本题正确答案为 D.

10. **【答案】** B

【解析】 本题主要考查圆锥曲线.

注意到抛物线 C 和圆 C' 都经过坐标原点，

所以 $P(0,0)$，

设 $Q(m,n)$（$m>0$），则 $|PQ|^2=m^2+n^2=5$，

因为点 $Q(m,n)$ 在圆 C' 上，

所以 $\begin{cases} m^2+n^2=5 \\ m^2+n^2-\frac{5}{2}n=0 \end{cases}$，

所以 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$，

所以 $Q(1,2)$，

所以 $2^2=2p\times1$，即 $p=2$，

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，焦点为 $F(1,0)$，准线 l：$x=-1$，

如图，过点 A 作 $AA_1\perp l$ 于点 A_1，过点 B 作 $BB_1\perp l$ 于点 B_1，

根据抛物线的定义可知 $|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=|AA_1|+|BB_1|$，

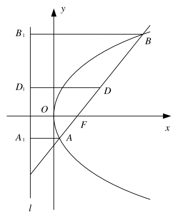
因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，

所以点 D 是 AB 的中点，

所以根据梯形的中位线定理可知，点 D 到准线 l 的距离为 $d=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=\frac{|AB|}{2}=4$，

所以 $x_D+1=4$，

所以 $x_D=3$.



故本题正确答案为 B.

11. 【答案】D

【解析】本题主要考查三角函数.

A 项，因为 $f(x+\frac{\pi}{4})=|\sin(2x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(2x+\frac{\pi}{2})|$

$=|\cos 2x|+|\sin 2x|$

$=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期不为 $\frac{\pi}{2}$.

故 A 项结论错误.

B 项，因为 $|\sin 2x|\leqslant 1$，$|\cos 2x|\leqslant 1$，

所以 $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|\leqslant 2$，

其中当且仅当 $|\sin 2x|=1$，$|\cos 2x|=1$ 时可取等号，

但是此时 $|\sin 2x|^2+|\cos 2x|^2=2$，显然不成立.

所以 $f(x)<2$.

故 B 项结论错误.

C 项，当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$2x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 不单调.

故 C 项结论错误.

D 项，因为 $f(\frac{\pi}{8}+x)=|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|+|\cos(2x+\frac{\pi}{4})|$，

$f(\frac{\pi}{8}-x)=|\sin(\frac{\pi}{4}-2x)|+|\cos(\frac{\pi}{4}-2x)|=|\cos(2x+\frac{\pi}{4})|+|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$，

所以 $f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$.

所以函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

故 D 项结论正确.

故本题正确答案为 D.

12. 【答案】C

【解析】本题主要考查函数与方程.

令 $f(x)=0$ 得到 $\ln x-x^2+ax=0$，

所以 $a=x-\frac{\ln x}{x}$，$x\in[\frac{1}{e},e]$，

令 $g(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，$x\in[\frac{1}{e},e]$，

所以 $g'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，

注意到 $h(x)=x^2+\ln x-1$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，

所以当 $x\in[\frac{1}{e},1)$ 时，$h(x)<0$；当 $x\in(1,e]$ 时，$h(x)>0$，

所以当 $x\in[\frac{1}{e},1)$ 时，$g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}<0$；当 $x\in(1,e]$ 时，$g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{e},1)$ 上单调递减，在 $(1,e]$ 上单调递增，

因为 $g(\frac{1}{e})=e+\frac{1}{e}$，$g(1)=1$，$g(e)=e-\frac{1}{e}$，

所以当 $x\in[\frac{1}{e},1]$ 时，$g(x)\in[1,e+\frac{1}{e}]$；当 $x\in[1,e]$ 时，$g(x)\in[1,e-\frac{1}{e}]$，

因为 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{e},1)$ 上单调递减，在 $(1,e]$ 上单调递增，且 $g(x)=a$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 上有两个根，

所以 $a\in(1,e-\frac{1}{e}]$.

故本题正确答案为 C.

二、填空题

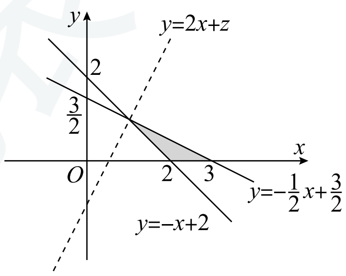
13. **【答案】** -1

【解析】 本题主要考查线性规划.

如下图所示作出可行域.

直线 $y=-x+2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的交点为 $(1,1)$，

当直线 $y=2x+z$ 过点 $(1,1)$ 时，z 取最大值，$z_{max}=1-2\times1=-1$.



故本题正确答案为 -1.

14. **【答案】** -6

【解析】 本题主要考查平面向量的线性运算和平面向量的数量积.

由题意 $2\vec{a}-\vec{b}=(3,-4)$，

所以 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=3\times2+(-4)\times3=-6$.

故本题正确答案为 -6.

15. **【答案】** -4

【解析】本题主要考查二项式定理.

$(x^3-\frac{1}{x})^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r x^{3(4-r)}(-1)^r x^{-r}=C_4^r(-1)^r x^{12-4r}$，故常数项为 $T_4=C_4^3(-1)^3=-4$.

故本题正确答案为 -4.

16. 【答案】$1+\sqrt{2}$

【解析】本题主要考查圆锥曲线和平面向量的应用.

令 $x=c$，得到 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

所以 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，

不妨设点 A 在第一象限，即 $A(c,\frac{b^2}{a})$，

所以 $\overrightarrow{AF_1}=(-2c,-\frac{b^2}{a})$，$\overrightarrow{AB}=(2c,-\frac{b^2}{a})$，

因为 $\angle F_1AB=90°$，

所以 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-4c^2+\frac{b^4}{a^2}=0$，

所以 $(c^2-a^2)^2=b^4=4a^2c^2$，

所以 $c^2-a^2=2ac$，

所以 $e^2-2e-1=0$，

所以 $e=1\pm\sqrt{2}$

因为 $e>1$，

所以 $e=1+\sqrt{2}$.

故本题正确答案为 $1+\sqrt{2}$.

三、计算题

17. 【答案】（1）因为 $a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$，

所以 $a_{n+1}^2-a_n^2-(a_n+a_{n+1})=0$，

所以 $(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}-a_n-1)=0$， ......2 分

因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，

所以 $a_{n+1}-a_n=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=1$，公差为 1 的等差数列， ......4 分

所以 $a_n=n$. ......5 分

（2）由（1）可得 $b_n=\frac{2a_n+3}{a_{n+1}^2a_{n+2}^2}$

$=\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$

$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}$， ......7 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$

$<\frac{1}{4}$，......10 分

因为 $S_n \geqslant S_1=\frac{5}{36}$，

所以 $\frac{5}{36} \leqslant S_n<\frac{1}{4}$. ......12 分

【解析】本题主要考查数列的递推与通项、等差数列以及数列的求和.

（1）对题干中的等式变形，并利用数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，得到 $a_{n+1}-a_n=1$，从而可以求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）使用裂项法得到 $b_n=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}$，求和之后可以得到 $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$，从而可以判断出 $\frac{5}{36} \leqslant S_n<\frac{1}{4}$.

18. 【答案】（1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle CBA=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB}$，

所以 $AC^2=BC^2+AB^2-2AB\cdot BC\cos 45°=4$，

所以 $BC^2+AC^2=AB^2$，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$， ......2 分

因为 $AP=BP$，点 P 是 AB 的中点，

所以 $CP\perp AB$，

由题意可知 $SA\perp$ 平面 ABC，

所以 $CP\perp SA$，

因为 $AB\cap SA=A$，AB、$SA\subset$ 平面 SAB，

所以 $CP\perp$ 平面 SAB， ......4 分

因为 $SB\subset$ 平面 SAB，

所以 $CP\perp SB$. ......5 分

（2）如图，取 CM 的中点 G，连接 PG、NG，

因为点 N 是 SM 的中点，点 G 是 CM 的中点，

所以 $NG//CS$，

因为 $CS\subset$ 平面 SAC，$NG\not\subset$ 平面 SAC，

所以 $NG//$ 平面 SAC，

因为 $PN//$ 平面 SAC，$NG\cap PN=N$，NG、$PN\subset$ 平面 PNG，

所以平面 $PNG//$ 平面 SAC， ......7 分

因为平面 $PNG\cap$ 平面 $ABC=PG$，平面 $PNG\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $PG//AC$，

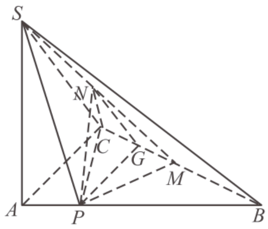
所以 $\frac{BP}{AP}=\frac{BG}{CG}=3$，

所以点 P 为线段 AB 靠近点 A 的四等分点， ......9 分

所以 $V_{S-CMP}=\frac{1}{3}S_{\triangle CMP}\cdot SA$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} \times 2$

$= \frac{1}{2}$. ......12 分



【解析】本题主要考查点、直线、平面的位置关系和空间几何体.

（1）首先根据余弦定理计算出 AC 的长度，可以判断出 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形．根据线面垂直的判定定理可以得到 $CP\perp$ 平面 SAB，从而可以得到 $CP\perp SB$.

（2）取 CM 的中点 G，根据三角形中位线定理可以得到 $NG//CS$，从而可以得到 $NG//$ 平面 SAC. 根据面面平行的判定定理可以得到平面 $PNG//$ 平面 SAC．再根据面面平行的性质定理可以得到 $PG//AC$，从而可以求出点 P 的位置，从而可以求出四面体 $SCMP$ 的体积.

19. 【答案】（1）这 200 名家长陪伴孩子的平均时间为 $30 \times 0.1 + 50 \times 0.3 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.2 = 64$（分钟）. ......2 分

（2）根据分层抽样的定义可得分数在 $[40, 60)$ 的抽取 3 人，分数在 $[60, 80)$ 的抽取 4 人， ......3 分

记分数在 $[40, 60)$ 的 3 人分别为 1、2、3，分数在 $[60, 80)$ 的 4 人分别为 A、B、C、D，

从中任取 2 人，可能的情况有 $(1,2)$、$(1,3)$、$(1,A)$、$(1,B)$、$(1,C)$、$(1,D)$、$(2,3)$、$(2,A)$、$(2,B)$、$(2,C)$、$(2,D)$、$(3,A)$、$(3,B)$、$(3,C)$、$(3,D)$、(A,B)、(A,C)、(A,D)、(B,C)、(B,D)、(C,D)，共 21 种， ......5 分

至少有 1 人陪伴孩子的时间在 $[60, 80)$ 的有 18 种， ......6 分

所以至少有 1 人陪伴孩子的时间在 $[60, 80)$ 的概率为 $P = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$. ......7 分

（3）补全列联表如下图：

	男性	女性	合计
陪伴时间少于60分钟	50	30	80
陪伴时间不少于60分钟	50	70	120
合计	100	100	200

所以 $K^2 = \frac{200 \times (50 \times 70 - 30 \times 50)^2}{100 \times 100 \times 80 \times 120} = \frac{25}{3} > 6.635$， ......10 分

所以有 99% 的把握认为陪伴时间的多少与家长的性别有关. ......12 分

【解析】本题主要考查随机抽样、古典概型以及统计案例.

（1）根据平均值的定义进行计算即可.

（2）首先根据分层抽样的方法得到分数在 $[40, 60)$ 的抽取 3 人，分数在 $[60, 80)$ 的抽取 4 人，然后列举出所有可能的情况，并找到符合题意的情况数，从而可以求出至少有 1 人陪伴孩子的时间在 $[60, 80)$ 的概率.

（3）补全列联表，然后计算出 K^2 的值，并与临界值比较，再给出结论即可.

20. **【答案】**（1）因为 $f(x)=-\frac{4}{3}x^3+(a+1)x^2-ax$，

所以 $f'(x)=-4x^2+2(a+1)x-a=-(2x-1)(2x-a)$， ......2 分

令 $f'(x)=0$ 得到 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{a}{2}$，

因为 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上有极值，

所以 $x_2=\frac{a}{2}>2$，

所以 $a>4$，

所以实数 a 的取值范围是 $(4,+\infty)$. ......4 分

（2）设过点 $P(0,-1)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 $(t,-\frac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at)$，

所以 $k=\dfrac{-\frac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at+1}{t}=f'(t)$， ......6 分

整理可得 $\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$， ......7 分

令 $g(t)=\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1$，

若过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切，则 $g(t)$ 只有一个零点，

因为 $g'(t)=8t^2-2(a+1)t$，

所以当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$g'(t)>0$；当 $t\in(0,\frac{a+1}{4})$ 时，$g'(t)<0$；当 $t\in(\frac{a+1}{4},+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{a+1}{4})$ 上单调递减，在 $(\frac{a+1}{4},+\infty)$ 上单调递增， ......9 分

注意到 $g(0)=1>0$，

因为 $g(\frac{a+1}{4})=\frac{8}{3}(\frac{a+1}{4})^3-\frac{(a+1)^3}{16}+1$

$=\frac{(a+1)^3}{24}-\frac{(a+1)^3}{16}+1$

$=-\frac{(a+1)^3}{48}+1$

>0， ......10 分

所以当 $t\in[0,+\infty)$ 时，$g(t)>0$ 恒成立，

因为 $g(-1)=-\frac{8}{3}-a<0$，$g(0)>0$，$g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一的零点.

综上所述，函数 $g(t)$ 在 R 上的零点个数为 1，

所以当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切. ......12 分

【解析】本题主要考查导数的概念及其几何意义、导数的计算以及导数在研究函数中的应用.

（1）对函数 $f(x)$ 求导得到 $f'(x)=-(2x-1)(2x-a)$，根据题意可以得到 $x_2=\frac{a}{2}>2$，从而可以求出实数 a 的取值范围.

（2）设过点 $P(0,-1)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 $(t,-\frac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at)$，然后根据切线的斜率 $k=f'(t)$ 建立等式，得到 $\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$. 令 $g(t)=\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1$，求导后判断出

$g(t)$ 的单调性，证明出 $g(t)$ 只有唯一零点，即可得到当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切.

21. **【答案】**（1）由题意 $2a=4\sqrt{2}$，即 $a=2\sqrt{2}$， ......1 分

设 $P(x_0,y_0)$，

所以 $\dfrac{0+2\sqrt{2}+x_0}{3}=\sqrt{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$， ......2 分

因为 $S_{\triangle OPN}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}|y_0|=\sqrt{6}$，

所以 $|y_0|=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，

所以 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{b^2}=1$，

所以 $b^2=4$， ......3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ......4 分

（2）

【法一】

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由余弦定理可得 $\begin{cases}|OM|^2=|OA^2|+|AM|^2-2|OA|\cdot|AM|\cdot\cos\angle OAM\\|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB\end{cases}$，

因为四边形 $OAMB$ 是平行四边形，

所以 $\angle OAM+\angle AOB=\pi$，$|AM|=|OB|$，

所以 $\cos\angle OAM+\cos\angle AOB=0$，

所以两式相加可得 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$， ......6 分

因为 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1x_2=-2y_1y_2$， ......8 分

因为点 A、B 在椭圆 C 上，

所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{4}=1\\\dfrac{x_2^2}{8}+\dfrac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1^2-8=-2y_1^2\\x_2^2-8=-2y_2^2\end{cases}$，

所以两式相乘、相加得到 $\begin{cases}(x_1^2-8)(x_2^2-8)=4y_1^2y_2^2\\(x_1^2-8)+(x_2^2-8)=-2(y_1^2+y_2^2)\end{cases}$，

将 $x_1x_2=-2y_1y_2$ 代入可得 $\begin{cases}x_1^2+x_2^2=8\\y_1^2+y_2^2=4\end{cases}$， ......10 分

所以 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$

$=2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)$

$=24$，

即 $|OM|^2+|AB|^2$ 是定值，定值为 24. ......12 分

【法二】

设 $A\left(2\sqrt{2}\cos\alpha, 2\sin\alpha\right)$，$B\left(2\sqrt{2}\cos\beta, 2\sin\beta\right)$，

$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{2\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha}\cdot\dfrac{2\sin\beta}{2\sqrt{2}\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}=-\dfrac{1}{2}$，

故 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta-\alpha)=0$，令 $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，

故 B 点的坐标可修正为 $B\left(-2\sqrt{2}\sin\alpha, 2\cos\alpha\right)$，

$|OM|^2+|AB|^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2=2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)$，

$2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)=2\left[\left(8\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha\right)+\left(8\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha\right)\right]=24$，证毕.

【解析】本题主要考查圆锥曲线和直线与圆锥曲线.

（1）设 $P(x_0,y_0)$，根据题意得到 $2a=4\sqrt{2}$、$\dfrac{0+2\sqrt{2}+x_0}{3}=\sqrt{2}$、$S_{\triangle OPN}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}|y_0|=\sqrt{6}$，再根据 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ 即可求出椭圆 C 的方程.

（2）首先根据余弦定理以及平行四边形的性质得到 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$. 根据 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{2}$ 得到 $x_1x_2=-2y_1y_2$，根据点 A、B 在椭圆 C 上，得到 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{4}=1\\ \dfrac{x_2^2}{8}+\dfrac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$，变形整理并代入 $x_1x_2=-2y_1y_2$ 中可以得到 $\begin{cases}x_1^2+x_2^2=8\\ y_1^2+y_2^2=4\end{cases}$，从而可以计算出 $|OM|^2+|AB|^2$ 的值.

22. **【答案】**（1）因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，且 $x=\rho\cos\theta$，

所以 $\rho=2+x$，

所以 $x^2+y^2=\rho^2=(2+x)^2$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4(x+1)$， ......2 分

因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$，

所以直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$. ......4 分

（2）联立 $\begin{cases}y^2=4(x+1)\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$ 得到 $3x^2-4x-4=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4}{3}$，$x_1x_2=-\dfrac{4}{3}$， ......6 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}|x_1-x_2|$

$=2|x_1-x_2|$

$=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=2\sqrt{(\dfrac{4}{3})^2-4\times(-\dfrac{4}{3})}$

$=\dfrac{16}{3}$， ......8 分

因为点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{3-1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=1$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times 1=\dfrac{8}{3}$. ......10 分

【解析】 本题主要考查极坐标和参数方程.

（1）根据极坐标和直角坐标、参数方程和直角坐标方程的互化规则进行互化即可.

（2）联立曲线 C 和直线 l 的方程，可以求出 $|AB|$ 的值，再求出点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离，即可求出 $\triangle AMN$ 的面积.

23. **【答案】**（1）因为 $f(x)=|x-1|-2|x-2|$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x-3, & (x<1)\\ 3x-5, & (1\leqslant x\leqslant 2)\\ -x+3, & (x>2)\end{cases}$， ......2 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减， ......3 分

所以 $f(x)_{\max}=f(2)=1$，

所以 $t=1$. ......5 分

（2）由（1）可得 $2a+b+2c=3$， ......6 分

所以由柯西不等式可得 $(2a+b+2c)^2\leqslant(2^2+1^2+2^2)(a^2+b^2+c^2)$，

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant 1$， ......8 分

当且仅当 $\dfrac{a}{2}=b=\dfrac{c}{2}$ 时可取等号，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$. ......10 分

【解析】 本题主要考查求解绝对值不等式和柯西不等式.

（1）首先去掉函数 $f(x)$ 中的绝对值，然后判断出函数 $f(x)$ 的单调性，即可求出 $f(x)$ 的最大值，即 t 的值.

（2）使用柯西不等式可以直接证明出 $a^2+b^2+c^2\geqslant 1$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$.