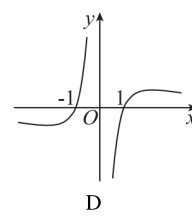
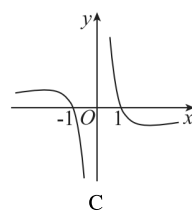
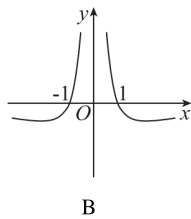
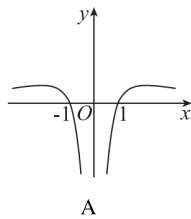


2022 年猿辅导高考数学模拟试卷 (新高考)

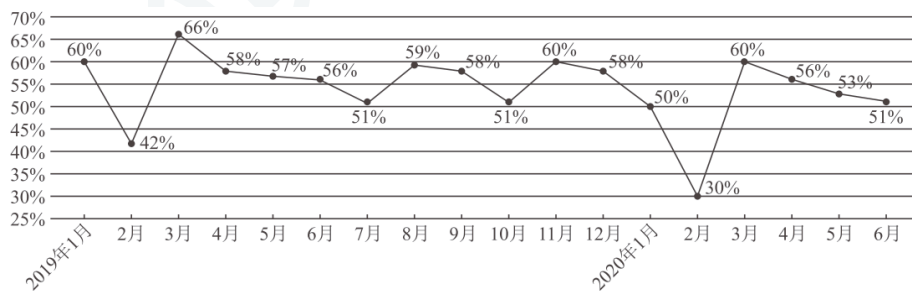
一、选择题。(共 60 分)

本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。第 1-8 小题为单选题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。第 9-12 小题为多选题，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题意要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

- 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 1, 2, 3\}$
- 复数 $z = \frac{1-i^3}{1+2i}$ 的虚部为 (\quad)
 A. $-\frac{1}{5}i$ B. $\frac{1}{5}i$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
- “ $a < 8$ ”是“方程 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + a = 0$ 表示圆”的 (\quad)
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha = (\quad)$
 A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{xe^{|x|} + x^3}$ 的大致图象为 (\quad)



6. 核酸检测分析是用荧光定量 PCR 法, 通过化学物质的荧光信号, 对在 PCR 扩增进程中成指数级增加的靶标 DNA 实时监测, 在 PCR 扩增的指数时期, 荧光信号强度达到阈值时, DNA 的数量 X_n 与扩增次数 n 满足 $\lg X_n = n \lg(1+p) + \lg X_0$, 其中 p 为扩增效率, X_0 为 DNA 的初始数量. 已知某被测标本 DNA 扩增 10 次后, 数量变为原来的 100 倍, 那么该样本的扩增效率 p 约为 ()
(参考数据: $10^{0.2} \approx 1.585$, $10^{-0.2} \approx 0.631$)
- A. 0.369 B. 0.415 C. 0.585 D. 0.631
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 是 C 的渐近线上一点, $|F_1F_2| = |MF_2|$, $\angle F_1F_2M = 120^\circ$, 则双曲线 C 的离心率为 ()
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{3}$
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(5) = 4$, $f(x+3)$ 是偶函数, 任意 $x_1, x_2 \in [3, +\infty)$ 满足 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则不等式 $f(3x-1) < 4$ 的解集为 ()
- A. $(\frac{2}{3}, 3)$ B. $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ C. $(2, 3)$ D. $(\frac{2}{3}, 2)$
9. 中国仓储指数是基于仓储企业快速调查建立的一套指数体系, 由相互关联的若干指标构成, 它能够反映各行业对仓储物流业务需求变化的情况. 下图是 2019 年 1 月至 2020 年 6 月中国仓储业务量指数走势图, 则下列说法正确的是 ()



2019年1月-2020年6月中国仓储业务量指数变化情况 (单位: %)

- A. 2019 年全年仓储业务量指数的极差为 24%
- B. 两年上半年仓储业务量指数均是 2 月份最低, 4 月份最高
- C. 两年上半年仓储业务量指数的方差相比, 2019 年低于 2020 年
- D. 2019 年仓储业务量指数的中位数为 59%
10. 已知 $\ln x > \ln y > 0$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ B. $(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^y$ C. $\log_y x > \log_x y$ D. $x^2 + \frac{4}{y(x-y)} \geq 8$

11. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5}{12}\pi, 0)$ 对称
- B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[1, 2]$
- C. 若 $f(x_1) = f(x_2) = 2$, 则 $x_1 - x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- D. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得 $g(x) = -2\cos 2x$ 的图象
12. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为正三棱柱, 且 $AA_1 = 2, AB = 2\sqrt{3}$, D 是 B_1C_1 的中点, 点 P 是线段 A_1D 上的动点, 则下列结论正确的是 ()
- A. 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 20π
- B. 若直线 PB 与底面 ABC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta$ 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{1}{2}]$
- C. 若 $A_1P = 2$, 则异面直线 AP 与 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
- D. 若过 BC 且与 AP 垂直的截面 α 与 AP 交于点 E , 则三棱锥 $P - BCE$ 的体积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题。(共 20 分)

本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。将正确的答案填在相应的横线上。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (-4, 3)$, $\mathbf{b} = (6, m)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ _____.
14. 二项式 $(x^2 + 1)(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^7$ 的展开式中的常数项为 _____.
15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-2} - 2m, & (x < 1) \\ 2x^3 - 6x^2, & (x \geq 1) \end{cases}$ 有最小值, 则 m 的一个正整数取值可以为 _____.
16. 已知抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 P 是 l 上一点, 过点 P 作 PF 的垂线交 x 轴的正半轴于点 A , AF 交抛物线于点 B , PB 与 y 轴平行, 则 $|FA| =$ _____.

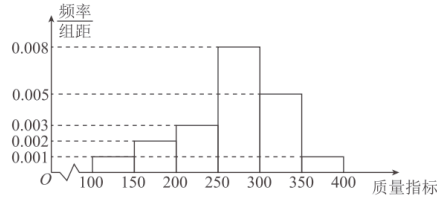
三、计算题。(共 72 分)

本大题共 6 小题, 共 70 分。根据题目要求, 写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 在条件① $2a + c = 2b \cos C$, $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, ② $b \sin 2A - a \sin A \cos C = \frac{1}{2}c \sin 2A$, $a = \sqrt{7}b$, ③ $(2 \tan B + \tan A) \sin A = 2 \tan B \tan A$, $2c = 3b$ 中任选一个, 补充到下面问题中, 并给出解答.
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $c = 3$, $\underline{\hspace{2cm}}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 20$, $S_n = 4n^2 + kn$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3$, $b_n - b_{n-1} = a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 求数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 某企业从生产的一批零件中抽取 100 件产品作为样本，检测其质量指标值 m ($m \in [100, 400]$) 得到下图的频率分布直方图，并依据质量指标值划分等级如表所示：

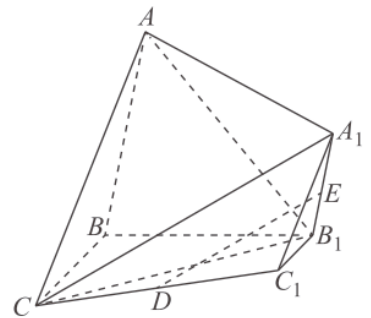


质量指标值 m	$150 \leq m < 350$	$100 \leq m < 150$ 或 $350 \leq m \leq 400$
等级	A 级	B 级

- (1) 根据频率分布直方图估计这 100 件产品的质量指标值的平均数 \bar{x} .
- (2) 以样本分布的频率作为总体分布的概率，解决下列问题：
- (i) 从所生产的零件中随机抽取 3 个零件，记其中 A 级零件的件数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望.
- (ii) 该企业为节省检测成本，采用混装的方式将所有零件按 400 个一箱包装，已知一个 A 级零件的利润是 12 元，一个 B 级零件的利润是 4 元，试估计每箱零件的利润.

20. 如图所示，在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $BC \perp BB_1$ ， $AB \perp BB_1$ ， $AB = BC = BB_1 = 2A_1B_1$ ， D 、 E 分别为 CC_1 、 A_1B_1 的中点.

- (1) 证明： $DE \parallel$ 平面 AB_1C .
- (2) 若 $\angle ABC = 120^\circ$ ，求平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 所成锐二面角的余弦值.



21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(4, 2)$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{6}$.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
 - (2) 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 当 k_1k_2 最大时, 求直线 l 的方程.

22. 已知函数 $f(x) = \ln(x + m) - xe^{-x}$.
- (1) 若 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 2y = 0$ 平行, 求 m 的值.
 - (2) 在 (1) 的条件下, 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.
 - (3) 当 $m > 1$ 时, 求 $f(x)$ 的零点个数.

参考答案与解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【解析】 本题主要考查集合的运算.

因为 $x^2 - 4x = x(x - 4) < 0$,

所以 $0 < x < 4$,

所以 $B = \{x | x^2 - 4x < 0\} = (0, 4)$,

所以 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

故本题正确答案为 B.

2. 【答案】 C

【解析】 本题主要考查复数的四则运算.

由题意 $z = \frac{1 - i^3}{1 + 2i} = \frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{(1 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$,

所以 z 的虚部为 $-\frac{1}{5}$.

故本题正确答案为 C.

3. 【答案】 B

【解析】 本题主要考查充分条件与必要条件.

因为 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + a = 0$,

所以 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - a$,

所以当 $5 - a > 0$, 即 $a < 5$ 时, 该方程表示圆.

记 $A = (-\infty, 8)$, $B = (-\infty, 5)$,

因为 $B \subsetneq A$,

所以“ $a < 8$ ”是“方程 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + a = 0$ 表示圆”的必要不充分条件.

故本题正确答案为 B.

4. 【答案】 B

【解析】 本题主要考查简单的三角恒等变换.

因为 $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 所以 $4 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha$. 因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$,

则 $2 \sin \alpha = \cos \alpha$. 又因为 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 所以 $(2 \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 1$, 所以 $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$, 解得

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (舍去).}$$

故本题正确答案为 B.

5. 【答案】 D

【解析】 本题主要考查函数的概念与性质.

由题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称,

$$\text{因为 } f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)e^{|-x|} + (-x)^3} = -\frac{x^2 - 1}{xe^{|x|} + x^3} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于坐标原点对称,

所以排除 A 项, B 项.

$$\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2 - 1}{xe^{|x|} + x^3} < 0,$$

所以排除 C 项.

故本题正确答案为 D.

6. 【答案】 C

【解析】 本题主要考查对数与对数函数.

$$\text{由题意 } \lg(100X_0) = 10 \lg(1+p) + \lg X_0,$$

$$\text{所以 } 10 \lg(1+p) = \lg 100 = 2,$$

$$\text{所以 } \lg(1+p) = 0.2,$$

$$\text{所以 } p = 10^{0.2} - 1 \approx 0.585.$$

故本题正确答案为 C.

7. 【答案】 B

【解析】 本题主要考查圆锥曲线.

$$\text{设 } M(m, n), F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$$

$$\text{由题意 } |MF_2| = |F_1F_2| = 2c, \angle MF_2x = \pi - \angle MF_2F_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} m = c + |MF_2| \cos \angle MF_2x = 2c \\ n = |MF_2| \sin \angle MF_2x = \sqrt{3}c \end{cases},$$

$$\text{所以 } M(2c, \sqrt{3}c),$$

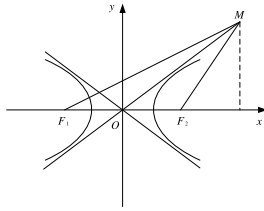
$$\text{因为点 } M \text{ 在直线 } y = \frac{b}{a}x \text{ 上,}$$

$$\text{所以 } \sqrt{3}c = \frac{2bc}{a},$$

$$\text{所以 } 3a^2 = 4b^2 = 4(c^2 - a^2),$$

$$\text{所以 } 7a^2 = 4c^2,$$

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.



故本题正确答案为 B.

8. 【答案】 D

【解析】 本题主要考查函数的概念与性质.

因为函数 $f(x+3)$ 是偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,

所以 $f(1) = f(5) = 4$,

因为任意 $x_1, x_2 \in [3, +\infty)$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减,

因为 $f(1) = f(5) = 4$, $f(3x-1) < 4$,

所以 $1 < 3x-1 < 5$,

所以 $\frac{2}{3} < x < 2$,

即不等式 $f(3x-1) < 4$ 的解集为 $(\frac{2}{3}, 2)$.

故本题正确答案为 D.

9. 【答案】 AC

【解析】 本题主要考查随机抽样.

A 项, 2019 年全年仓储业务量指数 3 月份最高, 为 66%, 2 月份最低, 为 42%, 所以极差为 $66\% - 42\% = 24\%$.

故 A 项说法正确.

B 项, 根据折线图可知, 两年上半年仓储业务量指数均是 2 月份最低, 3 月份最高.

故 B 项说法错误.

C 项, 根据折线图可知, 2019 年上半年仓储业务量指数的波动比 2020 年上半年的波动要小, 所以 2019 年上半年仓储业务量指数的方差低于 2020 年.

故 C 项说法正确.

D 项, 根据中位数的定义可知, 2019 年仓储业务量指数的中位数为 58%.

故 D 项说法错误.

故本题正确答案为 AC.

10. 【答案】 AC

【解析】 本题主要考查不等关系与不等式和均值不等式.

因为 $\ln x > \ln y > 0$,

所以 $x > y > 1$.

A 项, 因为 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} < 0$,

所以 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

故 A 项正确.

B 项, 因为函数 $y = (\frac{1}{3})^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递减, 且 $x > y > 1$,

所以 $(\frac{1}{3})^x < (\frac{1}{3})^y$.

故 B 项错误.

C 项, 因为 $x > y > 1$,

所以 $\log_y x > \log_y y = 1 = \log_x x > \log_x y$,

即 $\log_y x > \log_x y$.

故 C 项正确.

D 项, 因为 $y > 0, x - y > 0$,

所以 $y(x-y) \leq [\frac{y+(x-y)}{2}]^2 = \frac{x^2}{4}$,

所以 $x^2 + \frac{4}{y(x-y)} \geq x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8$,

当且仅当 $\begin{cases} y = x - y \\ x^2 = \frac{16}{x^2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 时可取等号,

因为 $x > y > 1$,

所以 $x^2 + \frac{4}{y(x-y)} > 8$.

故 D 项错误.

故本题正确答案为 AD.

11. 【答案】 BD

【解析】 本题主要考查三角函数、倍角公式与半角公式以及两角和与差公式.

由题意 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$

$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

$= 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

A 项, 因为 $f(\frac{5\pi}{12}) = 2\sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$,

所以 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 不是函数 $f(x)$ 图象的对称中心.

故 A 项错误.

B 项, 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$,

所以当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [1, 2]$.

故 B 项正确.

C 项, 因为 $f(x_1) = f(x_2) = 2$,

所以 $2x_1 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $2x_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$,

所以 $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$,

所以 $x_1 - x_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

故 C 项错误.

D 项, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $g(x) = 2 \sin[2(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -2 \cos 2x$ 的图象.

故 D 项正确.

故本题正确答案为 BD.

12. 【答案】AD

【解析】本题主要考查点、直线、平面的位置关系和空间几何体.

A 项, 由正弦定理可得 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $r = \frac{AB}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = 2$,

所以三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球半径为 $R = \sqrt{(\frac{AA_1}{2})^2 + r^2} = \sqrt{5}$,

所以三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 20\pi$.

故 A 项正确.

B 项, 如图, 取 BC 的中点 F , 连接 AF 、 DF 、 BD 、 A_1B ,

根据图形可知:

当点 P 与点 D 重合时, θ 最大, 此时 $DF = 2$, $BD = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$, $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$;

当点 P 与点 A_1 重合时, θ 最小, 此时 $AA_1 = 2$, $A_1B = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\sin \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

所以 $\sin \theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{7}}{7}]$.

故 B 项错误.

C 项, 如图, 将正三棱柱补全为直四棱柱, 则 $BC_1 \parallel AG$,

所以异面直线 AP 与 BC_1 所成的角为 $\angle GAP$ 或者它的补角,

因为 $\angle GA_1D = 90^\circ$,

所以 $GP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$,

因为 $AG = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$, $AP = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\text{所以 } \cos \angle GAP = \frac{4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \neq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \angle GAP \neq \frac{\pi}{4}.$$

故 C 项错误.

D 项, 注意到三棱锥 $P-ABC$ 的体积为定值,

所以若要三棱锥 $P-BCE$ 的体积最小, 则三棱锥 $E-ABC$ 的体积最大,

则点 E 到平面 ABC 的距离最大,

设点 F 为 BC 的中点, 考虑截面 AA_1DF ,

因为 $AP \perp$ 平面 α ,

所以点 E 在以 AF 为直径的圆上,

$$\text{从截面图可知, 点 } E \text{ 到平面 } ABC \text{ 的最大距离为 } h = \frac{1}{2}|AF| = \frac{3}{2},$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3},$$

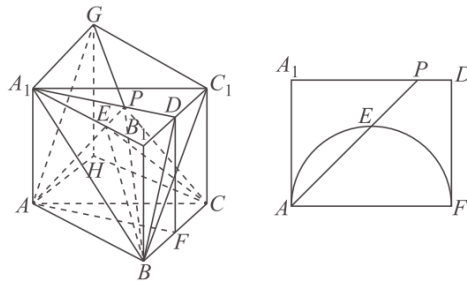
$$\text{所以 } V_{P-BCE} = V_{P-ABC} - V_{E-ABC}$$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot (AA_1 - h)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times (2 - \frac{3}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故 D 项正确.



故本题正确答案为 AD.

二、填空题

13. 【答案】 8

【解析】 本题主要考查平面向量的数量积.

因为 $\mathbf{a} = (-4, 3)$, $\mathbf{b} = (6, m)$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$,

则有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,

则 $-24 + 3m = 0$, 解得 $m = 8$.

故本题正确答案为 8.

14. 【答案】 -561

【解析】 本题主要考查二项式定理.

由二项式定理可知, $(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^7$ 的展开式中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_7^r (\frac{2}{\sqrt{x}})^{7-r} \cdot (-1)^r = (-1)^r \cdot 2^{7-r} C_7^r x^{\frac{r-7}{2}}$,

所以 $(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^7$ 的展开式中 x^{-2} 项的系数以及常数项分别为 $(-1)^3 \cdot 2^4 C_7^3 = -560$ 以及 $(-1)^7 2^0 C_7^7 = -1$,

所以 $(x^2 + 1)(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)^7$ 的展开式中的常数项为 $-560 + (-1) = -561$.

故本题正确答案为 -561.

15. 【答案】 4 (答案不唯一, 填 1、2、3 亦可)

【解析】 本题主要考查函数的概念与性质和导数在研究函数中的应用.

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$,

所以当 $x \in [1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

因为当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2^{x-2} - 2m$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

因为函数 $f(x)$ 有最小值,

所以 $-2m \geq f(2) = -8$,

所以 $m \leq 4$,

所以 m 的一个正整数取值为 4 (答案不唯一, 填 1、2、3 亦可).

故本题正确答案为 4 (答案不唯一, 填 1、2、3 亦可).

16. 【答案】 6

【解析】 本题主要考查圆锥曲线.

由题意 $F(0, 2)$, 准线方程为 $y = -2$,

不妨设 $P(m, -2)$, 则 $k_{PF} = \frac{2 - (-2)}{0 - m} = -\frac{4}{m}$, $B(m, \frac{m^2}{8})$,

因为 $PF \perp PA$,

所以 $k_{PA} = -\frac{1}{k_{PF}} = \frac{m}{4}$,

所以直线 $PA: y + 2 = \frac{m}{4}(x - m)$,

令 $y = 0$, 得到 $x = m + \frac{8}{m}$,

所以 $A(m + \frac{8}{m}, 0)$,

因为 F, B, A 三点共线,

所以 $k_{FB} = k_{FA}$,

$$\text{所以 } \frac{2 - \frac{m^2}{8}}{0 - m} = \frac{2 - 0}{0 - (m + \frac{8}{m})},$$

$$\text{整理可得 } m^4 + 8m^2 - 128 = (m^2 - 8)(m^2 + 16) = 0,$$

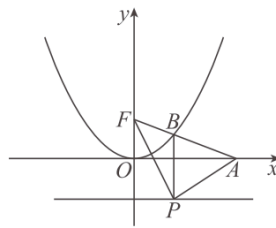
$$\text{所以 } m^2 = 8,$$

$$\text{所以 } |FA| = \sqrt{(m + \frac{8}{m})^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{m^2 + \frac{64}{m^2} + 20}$$

$$= \sqrt{8 + 8 + 20}$$

$$= 6.$$



故本题正确答案为 6.

三、计算题

17. 【答案】 选①: $2a + c = 2b \cos C$, $\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

由正弦定理可得 $2 \sin A + \sin C = 2 \sin B \cos C$,

所以 $2 \sin(B + C) + \sin C = 2 \sin B \cos C$,

所以 $2 \cos B \sin C + \sin C = 0$,

.....2 分

因为 $C \in (0, \pi)$,

所以 $\sin C \neq 0$,

所以 $\cos B = -\frac{1}{2}$,

.....4 分

因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $B = \frac{2\pi}{3}$,

.....6 分

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{7}{5}$,

.....8 分

设 $a = 5k$, $b = 7k$ ($k > 0$),

由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

所以 $\frac{25k^2 + 9 - 49k^2}{2 \times 5k \times 3} = -\frac{1}{2}$,

所以 $24k^2 - 15k - 9 = (k - 1)(24k + 9) = 0$,

因为 $k > 0$,

所以 $k = 1$,

所以 $a = 5, b = 7$,

.....10分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

.....12分

选②: $b \sin 2A - a \sin A \cos C = \frac{1}{2}c \sin 2A, a = \sqrt{7}b$.

由正弦定理可得 $\sin B \sin 2A - \sin^2 A \cos C = \frac{1}{2} \sin 2A \sin C$,

所以 $2 \sin A \cos A \sin B - \sin^2 A \cos C = \sin A \cos A \sin C$,

因为 $A \in (0, \pi)$,

所以 $\sin A \neq 0$,

所以 $2 \cos A \sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin B$,

.....2分

因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $\sin B \neq 0$,

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,

.....4分

因为 $A \in (0, \pi)$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$,

.....6分

所以由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

所以 $\frac{b^2 + 9 - 7b^2}{2 \times b \times 3} = \frac{1}{2}$,

.....8分

整理可得 $2b^2 + b - 3 = (b - 1)(2b + 3) = 0$,

因为 $b > 0$,

所以 $b = 1$,

.....10分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

.....12分

选③: $(2 \tan B + \tan A) \sin A = 2 \tan B \tan A, 2c = 3b$.

所以 $\frac{2 \sin B}{\cos B} + \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2 \sin B}{\cos A \cos B}$,

所以 $2 \cos A \sin B + \cos B \sin A = 2 \sin B$,

.....2分

由正弦定理可得 $2b \cos A + a \cos B = 2b$,

由余弦定理可得 $2b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2b$,

整理可得 $b^2 + 3c^2 - a^2 = 4bc$,

.....4分

因为 $2c = 3b, c = 3$,

所以 $2^2 + 3 \times 3^2 - a^2 = 4 \times 2 \times 3$,

所以 $a = \sqrt{7}$,

.....6分

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

.....8分

因为 $A \in (0, \pi)$,

所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

.....10分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$12分

【解析】 本题主要考查两角和与差公式和正弦定理与余弦定理.

若选①, 根据两角的和与差公式以及 $C \in (0, \pi)$ 可以得到 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 从而可以使用正弦定理得到 $\frac{b}{a} = \frac{7}{5}$, 再使用余弦定理可以求出 a, b 的值, 从而可以求出 $\triangle ABC$ 的面积.

若选②, 根据两角和与差公式以及 $B \in (0, \pi)$ 可以计算出 $\cos A = \frac{1}{2}$, 再根据余弦定理可以计算出 b 的值, 进而可以求出 $\triangle ABC$ 的面积.

若选③, 首先对题干中的等式进行转化, 再使用正弦定理和余弦定理对等式变形, 得到 $b^2 + 3c^2 - a^2 = 4bc$, 从而可以求出 a 的值, 再使用余弦定理可以求出 $\cos A$ 的值, 从而可以求出 $\triangle ABC$ 的面积.

18. **【答案】** (1) 因为 $S_n = 4n^2 + kn$,

所以 $S_1 = k + 4, S_2 = 2k + 16,$

所以 $a_2 = S_2 - S_1 = k + 12 = 20,$

所以 $k = 8,$ 2分

所以 $a_1 = S_1 = 12, S_n = 4n^2 + 8n,$

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 4(n-1)^2 + 8(n-1) = 4n^2 - 4,$

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 8n + 4,$ 4分

因为 $a_1 = 12,$

所以 $a_n = 8n + 4 (n \in \mathbb{N}^*).$ 5分

(2) 因为 $a_{n-1} = 8n - 4,$

所以 $b_n - b_{n-1} = 8n - 4 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*),$

所以 $b_n = (b_n - b_{n-1}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1$

$= (8n - 4) + (8n - 12) + \dots + (8 \times 2 - 4) + 3$

$= \frac{(8n - 4 + 12)(n - 1)}{2} + 3$

$= 4n^2 - 1 (n \geq 2),$ 7分

因为 $b_1 = 3,$

所以 $b_n = 4n^2 - 1 (n \in \mathbb{N}^*),$ 8分

所以 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right),$ 10分

所以 $T_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right)$

$= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right)$

$= \frac{n}{2n + 1}.$ 12分

【解析】 本题主要考查数列的递推与通项、等差数列以及数列的求和.

(1) 首先根据 $a_2 = 20$ 求出 k 的值, 再递推作差并验证 $a_1 = 12$, 得到 $a_n = 8n + 4 (n \in \mathbb{N}^*).$

(2) 根据累加法可以求出 $\{b_n\}$ 的通项公式, 再根据裂项法可以求出 T_n 的表达式.

19. 【答案】 (1) 由题意 $\bar{x} = 125 \times 0.05 + 175 \times 0.1 + 225 \times 0.15 + 275 \times 0.4 + 325 \times 0.25 + 375 \times 0.05 = 267.5$.
.....2分

(2) (i) 因为一个零件为 A 级的概率为 $p = 1 - 2 \times 50 \times 0.001 = 0.9$,
.....3分

所以 $\xi \sim B(3, 0.9)$,
.....4分

所以 $P(\xi = k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}$, $\xi = 0, 1, 2, 3$,

所以 $P(\xi = 0) = 0.001$, $P(\xi = 1) = 0.027$, $P(\xi = 2) = 0.243$, $P(\xi = 3) = 0.729$,
.....6分

所以随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

.....7分

所以 $E(\xi) = np = 3 \times 0.9 = 2.7$.
.....8分

(ii) 设每箱中 A 级零件有 X 个, B 级零件有 $(400 - X)$ 个, 每箱零件的利润为 Y 元,

所以 $Y = 12X + 4(400 - X) = 8X + 1600$,
.....9分

因为 $X \sim B(400, 0.9)$,

所以 $E(X) = 400 \times 0.9 = 360$,
.....10分

所以 $E(Y) = 8E(X) + 1600$

$= 8 \times 360 + 1600$

$= 4480$ 元,

即估计每箱零件的利润为 4480 元.
.....12分

【解析】 本题主要考查随机抽样和随机变量及其分布.

(1) 根据平均值的定义进行计算即可.

(2) (i) 首先计算出一个零件为 A 级的概率, 然后判断出 $\xi \sim B(3, 0.9)$, 从而可以求出 ξ 的分布列和数学期望.

(ii) 设每箱中 A 级零件有 X 个, B 级零件有 $(400 - X)$ 个, 每箱零件的利润为 Y 元. 根据定义可得到 $Y = 12X + 4(400 - X) = 8X + 1600$, 判断出 $X \sim B(400, 0.9)$, 从而可以求出 $E(X)$, 从而可以求出随机变量 Y 的数学期望, 即估计出了每箱零件的利润.

20. 【答案】 (1) 如图, 取 AA_1 的中点 F , 连接 DF 、 EF ,

因为点 D 是 CC_1 的中点, 点 F 是 AA_1 的中点, $AC \parallel A_1C_1$

所以 DF 是梯形 ACC_1A_1 的中位线,

所以 $DF \parallel AC$,
.....1分

因为点 E 是 A_1B_1 的中点, 点 F 是 AA_1 的中点,

所以 EF 是 $\triangle A_1AB_1$ 的中位线,

所以 $EF \parallel AB_1$,
.....2分

因为 $DF \cap EF = F$, $AC \cap AB_1 = A$, DF 、 $EF \subset$ 平面 DEF , AC 、 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C ,

所以平面 $DEF \parallel$ 平面 AB_1C ,
.....3分

因为 DEC 平面 DEF ,

所以 $DE //$ 平面 AB_1C .

.....4 分

(2) 因为 $BC \perp BB_1$, $AB \perp BB_1$, $BC \cap AB = B$, BC 、 $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

.....5 分

如图, 过点 B 作 $BG \perp AC$ 交 AC 于点 G , 则 BC 、 BB_1 、 BG 两两互相垂直,

如图, 以点 B 为坐标原点, BC 、 BB_1 、 BG 所在的直线为 x 、 y 、 z 轴, 建立空间直角坐标系,

不妨设 $BC = 2$,

所以 $A(-1, 0, \sqrt{3})$, $B(0, 0, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B_1(0, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AC} = (3, 0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{B_1C} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

.....7 分

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{B_1C} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ 2x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x_1 = 1, \text{ 得到 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = \sqrt{3} \end{cases}$$

.....8 分

所以 $\vec{n}_1 = (1, 1, \sqrt{3})$,

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{B_1C} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x_2 - 2y_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x_2 = \sqrt{3} \text{ 得到 } \begin{cases} x_2 = \sqrt{3} \\ y_2 = \sqrt{3} \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

所以 $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$,

.....10 分

设平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 所成锐二面角的大小为 θ ,

所以 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|$

$$= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

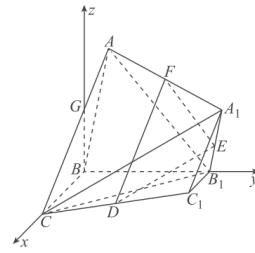
$$= \frac{1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$$

$$= \frac{3\sqrt{105}}{35},$$

即平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{105}}{35}$.

.....12 分



【解析】 本题主要考查点、直线、平面的位置关系和空间向量的应用.

(1) 取 AA_1 的中点 F , 连接 DF 、 EF , 根据梯形的中位线定理和三角形的中位线定理得到 $DF \parallel AC$ 、 $EF \parallel AB_1$, 从而可以根据面面平行的判定定理得到平面 $DEF \parallel$ 平面 AB_1C , 从而可以得到 $DE \parallel$ 平面 AB_1C .

(2) 首先判断出 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 过点 B 作 $BG \perp AC$ 交 AC 于点 G , 可以判断出 BC 、 BB_1 、 BG 两两互相垂直, 从而可以建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $BC = 2$, 可以写出相关点和向量的坐标, 求出平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 的法向量, 即可求出平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 所成锐二面角的余弦值.

21. **【答案】**

$$(1) \text{ 由题意 } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \times 2 = 2\sqrt{6} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 6 \end{cases}$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. \dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 当直线 l 的斜率为 0 时, $k_1 k_2 = \frac{2}{4-2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. \dots\dots 5 \text{ 分}

当直线 l 的斜率不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = my + 2 \end{cases} \text{ 得到 } (m^2 + 4)y^2 + 4my - 4 = 0, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{4}{m^2 + 4}, \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 k_2 &= \frac{2-y_1}{4-x_1} \cdot \frac{2-y_2}{4-x_2} \\ &= \frac{(2-y_1)(2-y_2)}{[4-(my_1+2)][4-(my_2+2)]} \\ &= \frac{4-2(y_1+y_2)+y_1 y_2}{4-2m(y_1+y_2)+m^2 y_1 y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 - \frac{-8m}{m^2 + 4} + \frac{-4}{m^2 + 4}}{4 - \frac{2m(-4m)}{m^2 + 4} + \frac{-4m^2}{m^2 + 4}} \\
 &= \frac{m^2 + 2m + 3}{2m^2 + 4} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2m + 1}{2m^2 + 4},
 \end{aligned}$$

.....9分

令 $t = 2m + 1$, 则 $m = \frac{t - 1}{2}$,

当 $t = 0$ 时, $k_1 k_2 = \frac{1}{2}$;

当 $t \neq 0$ 时, $k_1 k_2 = \frac{1}{2} + \frac{t}{2(\frac{t-1}{2})^2 + 4}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} + \frac{2t}{t^2 - 2t + 9} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{t + \frac{9}{t} - 2}
 \end{aligned}$$

因为 $y = t + \frac{9}{t} - 2 \in (-\infty, -8] \cup [4, +\infty)$,

所以当 $t = 3$ 时, $(k_1 k_2)_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$,

此时 $t = 2m + 1 = 3$, 所以 $m = 1$,

.....11分

此时直线 l 的方程为 $x - y - 2 = 0$.

.....12分

【解析】 本题主要考查圆锥曲线和直线与圆锥曲线.

(1) 根据椭圆的离心率和 $\triangle PF_1 F_2$ 的面积, 可以求出椭圆 C 的参数, 从而可以求出椭圆 C 的标准方程.

(2) 当直线 l 的斜率为 0 时, 可以求出 $k_1 k_2 = \frac{1}{2}$. 当直线 l 的斜率不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$, 与椭圆方程联立, 使用韦达定理表示出 $y_1 + y_2$ 、 $y_1 y_2$, 然后可以表示出 $k_1 k_2$, 并研究其最大值, 从而可以求出对应的直线 l 的方程.

22. **【答案】** (1) 因为 $f(x) = \ln(x + m) - xe^{-x}$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{x + m} + (x - 1)e^{-x}$,

.....1分

由题意 $f'(1) = \frac{1}{1 + m} = \frac{1}{2}$,

所以 $m = 1$.

.....2分

(2) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \ln(x + 1) - xe^{-x}$, $f'(x) = \frac{1}{x + 1} + (x - 1)e^{-x}$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{x + 1} + (x - 1)e^{-x} = \frac{e^x + x^2 - 1}{(x + 1)e^x}$,

.....3分

注意到函数 $y = e^x + x^2 - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $e^x + x^2 - 1 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $f'(x) = \frac{e^x + x^2 - 1}{(x+1)e^x} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,4分

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $f(x) > 0$5分

(3) 由(1)可得, 当 $m > 1$, $x > 0$ 时, $f(x) = \ln(x+m) - xe^{-x} > \ln(x+1) - xe^{-x} > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点,6分

下面考虑函数 $f(x)$ 在 $(-m, 0)$ 上的零点个数,

注意到 $f'(x) = \frac{1}{x+m} + (x-1)e^{-x} = \frac{e^x + x^2 + (m-1)x - m}{(x+m)e^x}$,

令 $g(x) = e^x + x^2 + (m-1)x - m$, $x \in (-m, 0)$,

所以 $g'(x) = e^x + 2x + m - 1$, 在 $(-m, 0)$ 上单调递增,

因为 $g'(-m) = e^{-m} - m - 1 < 0$, $g'(0) = m > 0$,

所以 $g'(x)$ 在 $(-m, 0)$ 上存在唯一零点 $x_0 \in (-m, 0)$, 且当 $x \in (-m, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $g'(x) > 0$,8分

所以函数 $g(x)$ 在 $(-m, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 0)$ 上单调递增,

因为 $g(-m) = e^{-m} > 0$, $g(0) = 1 - m < 0$, $g(x_0) < g(0) < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(-m, x_0)$ 上存在唯一零点 x_1 , 且当 $x \in (-m, x_1)$ 时, $g(x) > 0$; 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $g(x) < 0$,

所以当 $x \in (-m, x_1)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+m)e^x} > 0$; 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+m)e^x} < 0$,10分

所以 $f(x)$ 在 $(-m, x_1)$ 上单调递增, 在 $(x_1, 0)$ 上单调递减,

因为 $f(0) = \ln m > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(x_1, 0)$ 上无零点, 且 $f(x_1) > f(0) > 0$,

取 $x_2 = -m + e^{-me^m} \in (-m, 0)$, 则 $-x_2 e^{-x_2} < me^m = me^m$,

则 $f(x_2) < \ln(x_2 + m) + me^m = 0$,

所以由零点存在定理可得函数 $f(x)$ 在 $(-m, 0)$ 上仅有一个零点.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $(-m, +\infty)$ 上只有一个零点.12分

【解析】 本题主要考查导数的概念及其几何意义、导数的计算以及导数在研究函数中的应用.

(1) 对函数 $f(x)$ 求导得到 $f'(x)$, 根据题意得到 $f'(1) = \frac{1}{1+m} = \frac{1}{2}$, 从而得到 m 的值.

(2) 直接研究 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的正负性, 可以得到 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 进而可以得到 $f(x)$ 的零点个数.

(3) 根据(2)中的结论, 并通过不等式的放缩可以得到当 $m > 1$, $x > 0$ 时函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点. 当 $x \in (-m, 0)$ 时, 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x)$, 对其分子上的函数 $g(x)$ 再求导得到 $g'(x)$, 通过研究 $g'(x)$ 的正负得到 $g(x)$ 的单调性, 从而可以得到 $f'(x)$ 的正负性以及函数 $f(x)$ 的单调性. 再通过取特值 $x_2 = -m + e^{-me^m} \in (-m, 0)$, 可以判断出函数 $f(x)$ 在 $(-m, 0)$ 上仅有一个零点. 综上所述, 便得到了函数 $f(x)$ 在 $(-m, +\infty)$ 上只有一个零点.