2022 年猿辅导高考数学模拟试卷（理）

一、选择题。（共 60 分）

本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{0,2,4\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$（　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1,3,5\}$　　C. $\{0,1,2,4\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}+1}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z^2|=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 10

3. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_4+1=a_5$，则 $a_6=$（　　）

A. 27　　B. 32　　C. 64　　D. 81

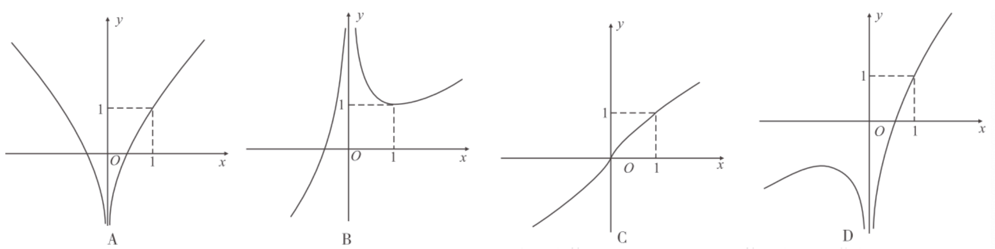
4. 体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 12π　　B. $\dfrac{32}{3}\pi$　　C. 8π　　D. 4π

5. 已知直线 l 与曲线 $y=x^2+\ln x$ 相切，则下列直线不可能与 l 平行的是（　　）

A. $y=3x-1$　　B. $y=7x+1$　　C. $y=\sqrt{2}x-1$　　D. $y=2\sqrt{2}x+1$

6. 函数 $f(x)=x+\ln|x|$ 的图象大致是（　　）



7. 下图是国家统计局发布的生产资料出厂价格涨跌幅以及生活资料出厂价格涨跌幅的统计图．现有如下说法：

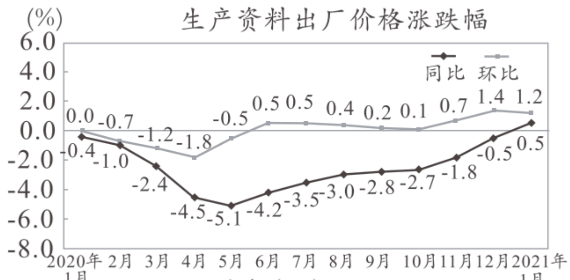
①2020年下半年生产资料的出厂价格的环比涨幅呈现上升趋势.

②可以预测，在市场平稳的前提下，2021年2月生活资料出厂价格的环比可能为正数.

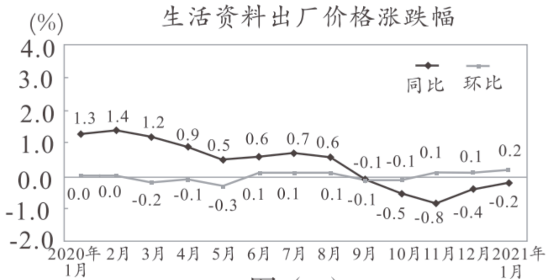
③从2020年1月~12月生活资料出厂价格同比的数据中随机抽取3个，恰有2个是正数的概率为$P=\frac{28}{55}$.

④将2020年1月~2021年1月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列后，所得的中位数为0.2%.

则正确的有（　）



图（1）



图（2）

A. ①③④　　B. ②③　　C. ②③④　　D. ②④

8. 已知$a=0.3^{-\log_{0.3}e}$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{30}20$，则（　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

9. 关于函数$f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$，下列结论正确的是（　）

A. $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$

B. $f(x)$的最大值为2

C. $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减

D. $x=\frac{\pi}{8}$是$f(x)$的一条对称轴

10. 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R，导函数为 $f'(x)$，若对任意 $x\in R$ 都有 $2f(x)+xf'(x)>x^2$ 恒成立，则下列结论正确的是（　）

A. $4f(-2)<f(-1)$　　B. $25f(5)>f(1)$　　C. $25f(5)<f(-1)$　　D. $f(0)<0$

11. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别是 F_1、F_2，点 A 在双曲线上，$AF_2\perp x$ 轴，若点 $B(2c,0)$ 使得 $\angle F_1AB$ 是钝角，其中 c 是双曲线 C 的半焦距，则 C 的离心率的取值范围是（　）

A. $(1,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})$　　B. $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},+\infty)$　　C. $(1,\frac{\sqrt{2}+2}{2})$　　D. $(\frac{\sqrt{2}+2}{2},+\infty)$

12. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$．若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$b_n=\left[\frac{(n+1)^2}{2S_n}\right]$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 2021 项和 $T_{2021}=$（　）

A. 1010　　B. 1011　　C. 2021　　D. 2022

二、填空题。（共 20 分）

本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将正确的答案填在相应的横线上。

13. 若 $\tan\alpha=3$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$____.

14. 已知向量 $\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(2,3)$，若 $(k\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，则实数 $k=$____.

15. $(x^2+2)(x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为____.

16. 已知抛物线 C：$y^2=16x$ 的焦点为 F，点 $A(-4,0)$，点 P 是抛物线 C 上的动点，则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为____.

三、计算题。（共 80 分）

本大题共 7 小题，其中 17-21 是必做题，每小题 12 分，22-23 是选做题，每小题 10 分。根据题目要求，写出文字说明、证明过程或演算步骤。请在 22,23 两题中任选一题作答。如果多选，则按所做的第一题计分。

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2(B+C)+3\sin B\sin C$，$a=\sqrt{6}$.

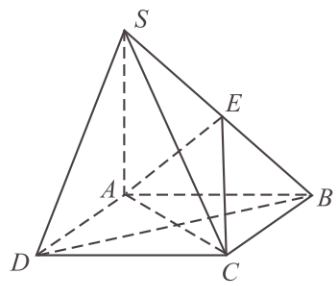
（1）求 A 的值.

（2）求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值.

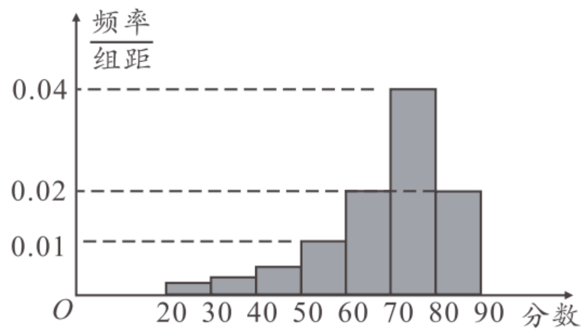
18. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle CAD=60°$，$\angle SBA=45°$，$SB=SC=SD$.

（1）求证：$SA\perp BD$.

（2）设 E 是线段 SB 的中点，求二面角 $S-AC-E$ 的余弦值.



19. 学期结束时，学校对食堂进行评测，测评方式：从全校学生中随机抽取 100 人给食堂打分，打分在 60 以下视为“不满意”，在 60~80 视为“基本满意”，在 80 分及以上视为“非常满意”．现将他们给食堂打分的分数分组：$[20,30)$、$[30,40)$、$[40,50)$、$[50,60)$、$[60,70)$、$[70,80)$、$[80,90]$，得到如下频率分布直方图.



（1）求这 100 人中“不满意”的人数并估计食堂得分的中位数.

（2）若按满意度采用分层抽样的方法，从这 100 名学生中抽取 15 人，再从这 15 人中随机抽取 3 人，记这 3 人中对食堂“非常满意”的人数为 X.

（i）求 X 的分布列.

（ii）若抽取的 3 人中对食堂“非常满意”的同学将获得食堂赠送的 200 元现金，其他同学将获得 100 元现金，请估计这 3 人将获得的现金总额.

20. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点 N，长轴长为 $4\sqrt{2}$，P 为椭圆上一点，O 为坐标原点，且 $\triangle OPN$ 重心的横坐标为 $\sqrt{2}$，$\triangle OPN$ 的面积为 $\sqrt{6}$.

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，以 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OAMB$，且 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，试判断 $|OM|^2+|AB|^2$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x-1$.

（1）判断函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\frac{\pi}{2}]$ 上的零点个数，并说明理由.

（2）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)+mx\geqslant 0$，求实数 m 的取值范围.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，$A(2,\dfrac{\pi}{6})$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程以及直线 l 的普通方程.

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 M、N 两点，求 $\triangle AMN$ 的面积.

23. 已知函数 $f(x)=|x-1|-2|x-2|$ 的最大值为 t.

（1）求 t 的值.

（2）设 a、b、c 均为正实数，且满足 $2a+b+2c=3t$，求证：$a^2+b^2+c^2 \geqslant t$.

参考答案与解析

一、选择题

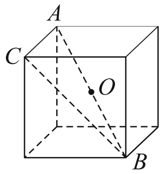
1. 【答案】C
【解析】本题主要考查集合之间的关系.
由集合的定义可得 $A\cap B=\{1\}$，则 $\{1\}\cup C=\{0,1,2,4\}$.
故本题正确答案为 C.

2. 【答案】C
【解析】本题主要考查复数的四则运算.
由题意 $z^2=\dfrac{(2\mathrm{i}+1)^2}{(1+\mathrm{i})^2}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=2+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，
所以 $|z^2|=\sqrt{2^2+(\dfrac{3}{2})^2}=\dfrac{5}{2}$.
故本题正确答案为 C.

3. 【答案】B
【解析】本题主要考查等比数列.
设各项均为正数的等比数列的公比为 q（$q>0$），
若 $q=1$，则 $S_4+1=4a_1+1=5\neq a_5$，不符合题意，
所以 $q\neq 1$，
所以 $S_4=\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_5-1=a_1q^4-1$，
所以 $\dfrac{1-q^4}{1-q}=q^4-1$，
所以 $1-q=-1$，
所以 $q=2$，
所以 $a_6=a_1q^5=2^5=32$.
故本题正确答案为 B.

4. 【答案】A
【解析】本题主要考查空间几何体.
如图所示，正方形的顶点都在同一球面上，O 为球心，AB 为直径，
设正方体的边长为 a，则 $a^3=8$，解得 $a=2$，
设球的半径为 R，由勾股定理得 $(2R)^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2=3a^2=12$，所以 $S=4\pi R^2=12\pi$.

故本题正确答案为 A.



5. 【答案】C

【解析】本题主要考查导数的概念及其几何意义、导数的计算以及均值不等式.

令 $f(x)=x^2+\ln x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{2}$，

所以曲线 $y=x^2+\ln x$ 的切线的斜率 $k\geqslant 2\sqrt{2}$，

所以 A、B、C、D 四个选项中只有 C 项不可能与切线 l 平行.

故本题正确答案为 C.

6. 【答案】D

【解析】本题主要考查函数的概念与性质.

因为 $f(x)=x+\ln|x|$，$f(-x)=-x+\ln|x|$，

所以 $f(x)\neq f(-x)$，$f(x)+f(-x)\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 既不是偶函数，也不是奇函数，

所以函数 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称，也不关于坐标原点对称，

所以排除 A 项，C 项.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$ 单调递增，

所以排除 B 项.

故本题正确答案为 D.

7. 【答案】C

【解析】本题主要考查事件与概率和随机抽样.

①项，根据图（1）可知，2020 年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降再上升.

故①项错误.

②项，根据图（2）可知，生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差价介于 –0.2%~0.4% 之间，

因为 2021 年 1 月环比的涨幅为 0.2%，

所以可以预测在市场平稳的前提下，2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为整数.

故②项正确.

③项，2020 年 1 月 ~12 月的生活资料出厂价格同比数据中，正数有 8 个，负数有 4 个，

所以从中随机抽取 3 个，恰有 2 个是正数的概率为 $P=\dfrac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\dfrac{28}{55}$.

故③项正确.

④项，根据中位数的定义可知，2020 年 1 月 ~2021 年 1 月生产资料出厂价格的环比涨跌幅的中位数为 0.2%.

故④项正确.

所以正确的说法有②③④.

故本题正确答案为 C.

8.　【答案】A

【解析】本题主要考查对数与对数函数.

由题意 $a=0.3^{-\log_{0.3}e}=0.3^{\log_{0.3}\frac{1}{e}}=\dfrac{1}{e}$，$b=\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}<b$，

因为 $c-b=\log_{30}20-\log_3 2$

$=\dfrac{\lg 20}{\lg 30}-\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$

$=\dfrac{1+\lg 2}{1+\lg 3}-\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$

$=\dfrac{(1+\lg 2)\lg 3-(1+\lg 3)\lg 2}{(1+\lg 3)\lg 3}$

$=\dfrac{\lg 3-\lg 2}{(1+\lg 3)\lg 3}$

>0，

所以 $c>b$，

所以 $a<b<c$.

故本题正确答案为 A.

9.　【答案】D

【解析】本题主要考查三角函数.

A 项，因为 $f(x+\dfrac{\pi}{4})=|\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})|+|\cos(2x+\dfrac{\pi}{2})|$

$=|\cos 2x|+|\sin 2x|$

$=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期不为 $\dfrac{\pi}{2}$.

故 A 项结论错误.

B 项，因为 $|\sin 2x|\leqslant 1$，$|\cos 2x|\leqslant 1$，

所以 $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|\leqslant 2$，

其中当且仅当 $|\sin 2x|=1$，$|\cos 2x|=1$ 时可取等号，

但是此时 $|\sin 2x|^2+|\cos 2x|^2=2$，显然不成立.

所以 $f(x)<2$.
故 B 项结论错误.
C 项，当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$2x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，
所以当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，
当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，
所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 不单调.
故 C 项结论错误.
D 项，因为 $f(\frac{\pi}{8}+x)=|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|+|\cos(2x+\frac{\pi}{4})|$，
$f(\frac{\pi}{8}-x)=|\sin(\frac{\pi}{4}-2x)|+|\cos(\frac{\pi}{4}-2x)|=|\cos(2x+\frac{\pi}{4})|+|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$，
所以 $f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$.
所以函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{8}$.
故 D 项结论正确.
故本题正确答案为 D.

10. **【答案】** B
【解析】 本题主要考查导数的计算和导数在研究函数中的应用.
令 $g(x)=x^2f(x)$，则 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，
因为 $g(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2f(x)=g(x)$，且函数 $g(x)$ 的定义域为 R，
所以函数 $g(x)$ 是偶函数.
因为当 $x>0$ 时，$g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]<0$
所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
A 项，因为函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，
所以 $g(-2)>g(-1)$，
所以 $4f(-2)>f(-1)$.
故 A 项错误.
B 项，因为函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $g(5)>g(1)$，
所以 $25f(5)>f(1)$.
故 B 项正确.
C 项，因为函数 $f(x)$ 是偶函数，
所以 $f(-1)=f(1)$，
所以 $25f(5)>f(1)=f(-1)$.
故 C 项错误.
D 项，因为 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，
所以 $2f(0)>0$，

所以 $f(0) > 0$.
故 D 项错误.
故本题正确答案为 B.

11. 【答案】A
【解析】本题主要考查圆锥曲线和平面向量的应用.
令 $x = c$，得到 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，
所以 $y = \pm\frac{b^2}{a}$，
不妨设点 A 在第一象限，即 $A(c, \frac{b^2}{a})$，
所以 $\overrightarrow{AF_1} = (-2c, -\frac{b^2}{a})$，$\overrightarrow{AB} = (c, -\frac{b^2}{a})$，
因为 $\angle F_1AB$ 是钝角，
所以 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AB} = -2c^2 + \frac{b^4}{a^2} < 0$，
所以 $b^4 < 2a^2c^2$，
所以 $c^2 - a^2 = b^2 < \sqrt{2}ac$，
所以 $e^2 - \sqrt{2}e - 1 < 0$，
所以 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < e < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，
因为 $e > 1$，
所以 $1 < e < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，
即 C 的离心率的取值范围是 $(1, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})$.
故本题正确答案为 A.

12. 【答案】D
【解析】本题主要考查数列的递推与通项和等差数列.
因为 $a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = a_n(a_n + 1)$，
所以 $a_{n+1}^2 - a_n^2 - (a_n + a_{n+1}) = 0$，
所以 $(a_n + a_{n+1})(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$，
因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，
所以 $a_{n+1} - a_n = 1$，
所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 1$，公差为 1 的等差数列，
所以 $a_n = n$，
所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$，
所以 $b_n = \left[\frac{(n+1)^2}{2S_n}\right] = \left[1 + \frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 2, & (n = 1) \\ 1, & (n > 1) \end{cases}$，

所以 $T_{2021} = 2 + 1 + 1 + \cdots + 1$
$= 2 + (2021 - 1) \times 1$
$= 2022.$
故本题正确答案为 D.

二、填空题

13. **【答案】** -2

【解析】 若 $\tan\alpha = 3$，

则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{3+1}{1-3\times 1} = -2.$

故本题正确答案为：-2.

14. **【答案】** $-\frac{4}{5}$

【解析】 本题主要考查平面向量的线性运算和平面向量的数量积.

由题意 $k\vec{a} - \vec{b} = (k-2, -2k-3)$，

因为 $(k\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$，

所以 $(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = k - 2 - 2(-2k-3) = 0$，

所以 $k = -\frac{4}{5}$.

故本题正确答案为 $-\frac{4}{5}$.

15. **【答案】** -25

【解析】 本题主要考查二项式定理.

因为 $(x^2 + 2)$ 中含有 x^2 项和常数项，

所以只要找到 $(x - \frac{1}{x})^6$ 中常数项和含 x^{-2} 项的系数即可.

因为 $(x - \frac{1}{x})^6$ 展开式的通项为 $P_{r+1} = (-1)^r C_6^r x^{6-2r}$，

所以 $(x - \frac{1}{x})^6$ 展开式的常数项为 $(-1)^3 C_6^3 = -20$，$(x - \frac{1}{x})^6$ 展开式含 x^{-2} 项的系数为 $(-1)^4 C_6^4 = 15$.

所以 $(x^2 + 2)(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项是 $1 \times 15 + 2 \times (-20) = -25$.

故本题正确答案为 -25.

16. **【答案】** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 本题主要考查圆锥曲线和直线与圆锥曲线.

【法一】

如图，过点 P 作 $PQ\perp$ 准线 $x=-4$ 于点 Q，

所以 $\dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$，

注意到当直线 AP 与抛物线 C 相切时 $\angle PAQ$ 最小，$\sin\angle PAQ$ 也最小，

设直线 PA 的方程为 $y=k(x+4)$，

联立 $\begin{cases} y^2=16x \\ y=k(x+4) \end{cases}$ 得到 $k^2x^2+(8k^2-16)x+16k^2=0$，

所以 $\Delta=(8k^2-16)^2-64k^4=0$，

所以 $k^2=1$，

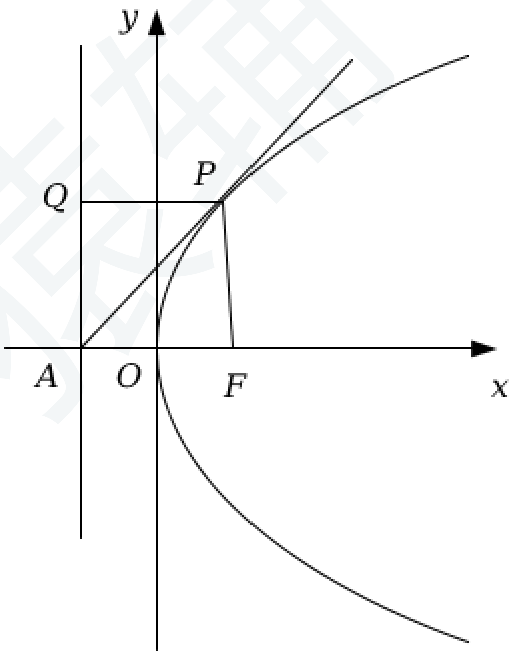
所以 $k=\pm1$，

所以 $\angle PAF=45°$，

所以 $\angle PAQ=90°-\angle PAF=45°$，

此时 $\sin\angle PAQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\left(\dfrac{|PF|}{|PA|}\right)_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



故本题正确答案为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【法二】

设 $P(x_0,y_0)$，由抛物线的定义与两点之间的距离公式可得：

$|PF|=x_0+4$，$|PA|=\sqrt{(x_0+4)^2+{y_0}^2}=\sqrt{(x_0+4)^2+16x_0}$，

故 $\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{x_0+4}{\sqrt{(x_0+4)^2+16x_0}}=\sqrt{\frac{(x_0+4)^2}{(x_0+4)^2+16x_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16x_0}{(x_0+4)^2}}}$，

由均值不等式：$(x_0+4)^2\geqslant\left(2\sqrt{4x_0}\right)^2=16x_0$，因此 $0<\frac{16x_0}{(x_0+4)^2}\leqslant 1$，

故 $\frac{|PF|}{|PA|}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、计算题

17. **【答案】**（1）因为 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2(B+C)+3\sin B\sin C$，

所以 $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A+\sin B\sin C$， ......1 分

所以由正弦定理可得 $b^2+c^2=a^2+bc$， ......3 分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$， ......4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ......6 分

（2）由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{2}$，

所以 $b=2\sqrt{2}\sin B$，$c=2\sqrt{2}\sin C$， ......8 分

所以 $a+b+c=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin C+\sqrt{6}$

$=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin(\frac{2\pi}{3}-B)+\sqrt{6}$

$=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-(-\frac{1}{2})\sin B]+\sqrt{6}$

$=3\sqrt{2}\sin B+\sqrt{6}\cos B+\sqrt{6}$

$=2\sqrt{6}\sin(B+\frac{\pi}{6})+\sqrt{6}$， ......10 分

因为 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})$，

所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以当 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$(a+b+c)_{\max}=3\sqrt{6}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 $3\sqrt{6}$. ......12 分

【解析】本题主要考查三角函数、正弦定理与余弦定理以及两角和与差公式.

（1）根据题干的等式以及正弦定理得到 $b^2+c^2=a^2+bc$，从而可以根据余弦定理得到 $\cos A=\frac{1}{2}$，结合 $A\in(0,\pi)$，即可得到 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）根据正弦定理得到 $b=2\sqrt{2}\sin B$，$c=2\sqrt{2}\sin C$，从而可以根据两角和与差公式以及辅助角公式化简得到 $a+b+c=2\sqrt{6}\sin(B+\frac{\pi}{6})+\sqrt{6}$，结合 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})$ 即可求出 $\triangle ABC$ 的周长的最大值.

18. **【答案】**（1）

【法一】

如图，取 BC 的中点 M，连接 AM、SM，

在菱形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，$AB=BC$，

所以 $\angle BAC=\angle CAD=60^\circ$，

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

因为点 M 是 BC 的中点，

所以 $BC\perp AM$，......2 分

因为 $SB=SC$，点 M 是 BC 的中点，

所以 $BC\perp SM$，......3 分

因为 $AM\cap SM=M$，AM、$SM\subset$ 平面 SAM，

所以 $BC\perp$ 平面 SAM，

因为 $SA\subset$ 平面 SAM，

所以 $SA\perp BC$，

同理可得 $SA\perp CD$，......4 分

因为 $BC\cap CD=C$，BC、$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $SA\perp BD$.......6 分

【法二】

设 S 在底面 $ABCD$ 的投影为点 R，故有 $RB=RC=RD$，因此 R 是 $\triangle BCD$ 外接圆的圆心，

又 $AB=AC=AD$，故 R 与 A 重合，因此 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，从而 $SA\perp BD$，证毕.

（2）如图，取 CD 的中点 F，连接 AF，

仿照（1）中的证明可得 $\angle CAF=30^\circ$，

所以 $\angle BAF=90^\circ$，

所以 AF、AB、AS 两两互相垂直，......8 分

如图，以点 A 为坐标原点，AF、AB、AS 所在的直线为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系，

不妨设 $AB=2$，

所以 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$E(0,1,1)$，$S(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AS}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，......9 分

设平面 SAC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ 2z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$ 得到 $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=-\sqrt{3}\\ z_1=0\end{cases}$，

所以 $\overrightarrow{n_1}=(1,-\sqrt{3},0)$，......10 分

设平面 AEC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ y_2+z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$ 得到 $\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-\sqrt{3}, \\ z_2=\sqrt{3} \end{cases}$

所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$， ......11 分

设二面角 $S-AC-E$ 的大小为 θ，由图形可知 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

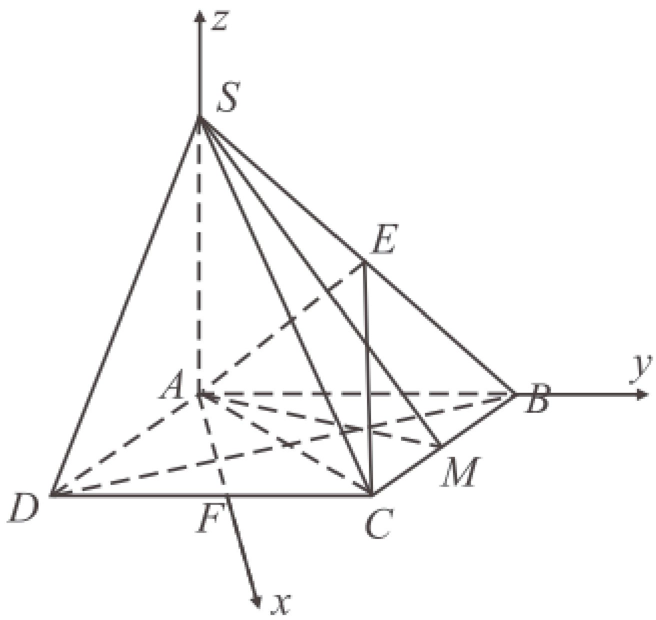
所以 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle|$

$=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$=\frac{4}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\times\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}}$

$=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角 $S-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ......12 分



【解析】本题主要考查点、直线、平面的位置关系和空间向量的应用.

（1）取 BC 的中点 M，连接 AM、SM，根据等腰三角形的性质得到 $BC\perp AM$、$BC\perp SM$，从而可以证明出 $BC\perp$ 平面 SAM，得到 $SA\perp BC$. 同理可以得到 $SA\perp CD$，从而可以得到 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，进而得到 $SA\perp BD$.

（2）取 CD 的中点 F，连接 AF，判断出 AF、AB、AS 两两互相垂直，从而可以建立如图所示的空间直角坐标系，写出相关点和向量的坐标，求出平面 SAC、平面 AEC 的法向量，进而可以求出二面角 $S-AC-E$ 的余弦值.

19. 【答案】（1）这 100 人中“不满意”的人数为 $100\times[1-(0.02+0.04+0.02)\times10]=20$， ......2 分

因为分数在 $[70,90]$ 的频率为 0.6，在 $[80,90]$ 的频率为 0.2，
所以中位数在区间 $[70,80)$，
所以食堂得分的中位数为 $80-\dfrac{0.8-0.5}{0.4}\times 10=72.5$（分）. ......4 分
（2）（i）由分层抽样的定义可知，抽取的“不满意”与“基本满意”的学生人数为 $15\times(1-0.2)=12$ 人，“非常满意”的学生人数为 $15\times 0.2=3$， ......5 分
所以随机变量 X 的取值为 0、1、2、3，
所以 $P(X=0)=\dfrac{C_{12}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{44}{91}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{12}^2C_3^1}{C_{15}^3}=\dfrac{198}{455}$，$P(X=2)=\dfrac{C_{12}^1C_3^2}{C_{15}^3}=\dfrac{36}{455}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_{15}^3}=\dfrac{1}{455}$， ......7 分
所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{44}{91}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

......8 分
（ii）由（i）得到 $E(X)=0\times\dfrac{44}{91}+1\times\dfrac{198}{455}+2\times\dfrac{36}{455}+3\times\dfrac{1}{455}=\dfrac{3}{5}$， ......9 分
因为 3 人获得的现金总额为 $Y=200X+100(3-X)=100X+300$， ......10 分
所以 $E(Y)=100E(X)+300=360$（元），
即估计这 3 人将获得的现金总额为 360 元. ......12 分
【解析】本题主要考查随机抽样和随机变量及其分布.
（1）求出“不满意”的频率，即可求出这 100 人中“不满意”的人数. 根据中位数的定义可以直接求出食堂得分的中位数.
（2）（i）根据分层抽样的定义可以求出抽取的“不满意”与“基本满意”的学生人数和“非常满意”的学生人数. 从而可以判断出随机变量 X 的取值以及对应的概率，并写出其分布列.
（ii）首先求出随机变量 X 的数学期望，再根据题意得到 $Y=100X+300$，然后可以求出 $E(Y)$，即这 3 人将获得的现金总额.

20. **【答案】**（1）由题意 $2a=4\sqrt{2}$，即 $a=2\sqrt{2}$， ......1 分
设 $P(x_0,y_0)$，
所以 $\dfrac{0+2\sqrt{2}+x_0}{3}=\sqrt{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$， ......2 分
因为 $S_{\triangle OPN}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}|y_0|=\sqrt{6}$，
所以 $|y_0|=\sqrt{3}$，
所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，
所以 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{b^2}=1$，
所以 $b^2=4$， ......3 分
所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ......4 分
（2）

【法一】

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由余弦定理可得 $\begin{cases} |OM|^2=|OA^2|+|AM|^2-2|OA|\cdot|AM|\cdot\cos\angle OAM \\ |AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB \end{cases}$，

因为四边形 $OAMB$ 是平行四边形，

所以 $\angle OAM+\angle AOB=\pi$，$|AM|=|OB|$，

所以 $\cos\angle OAM+\cos\angle AOB=0$，

所以两式相加可得 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$， ......6 分

因为 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1x_2=-2y_1y_2$， ......8 分

因为点 A、B 在椭圆 C 上，

所以 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{4}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{8}+\dfrac{y_2^2}{4}=1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1^2-8=-2y_1^2 \\ x_2^2-8=-2y_2^2 \end{cases}$，

所以两式相乘、相加得到 $\begin{cases} (x_1^2-8)(x_2^2-8)=4y_1^2y_2^2 \\ (x_1^2-8)+(x_2^2-8)=-2(y_1^2+y_2^2) \end{cases}$，

将 $x_1x_2=-2y_1y_2$ 代入可得 $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=8 \\ y_1^2+y_2^2=4 \end{cases}$， ......10 分

所以 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$

$=2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)$

$=24$，

即 $|OM|^2+|AB|^2$ 是定值，定值为 24. ......12 分

【法二】

设 $A\left(2\sqrt{2}\cos\alpha,2\sin\alpha\right)$，$B\left(2\sqrt{2}\cos\beta,2\sin\beta\right)$，

$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{2\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha}\cdot\dfrac{2\sin\beta}{2\sqrt{2}\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}=-\dfrac{1}{2}$，

故 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta-\alpha)=0$，令 $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，

故 B 点的坐标可修正为 $B\left(-2\sqrt{2}\sin\alpha,2\cos\alpha\right)$，

$|OM|^2+|AB|^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2=2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)$，

$2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)=2\left[\left(8\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha\right)+\left(8\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha\right)\right]=24$，证毕.

【解析】 本题主要考查圆锥曲线和直线与圆锥曲线.

（1）设 $P(x_0,y_0)$，根据题意得到 $2a=4\sqrt{2}$、$\dfrac{0+2\sqrt{2}+x_0}{3}=\sqrt{2}$、$S_{\triangle OPN}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}|y_0|=\sqrt{6}$，再根据 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ 即可求出椭圆 C 的方程.

（2）首先根据余弦定理以及平行四边形的性质得到 $|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$．根据 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{2}$ 得到 $x_1x_2=-2y_1y_2$，根据点 A、B 在椭圆 C 上，得到 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{4}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{8}+\dfrac{y_2^2}{4}=1 \end{cases}$，变形整理并代入 $x_1x_2=-2y_1y_2$

中可以得到 $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 8 \\ y_1^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$，从而可以计算出 $|OM|^2 + |AB|^2$ 的值.

21. **【答案】**（1）因为 $f(x) = e^x + \sin x - 1$，

所以 $f'(x) = e^x + \cos x$，

根据复合函数单调性可知 $f'(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

因为 $f'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$，$f'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$，

所以 $\exists x_0 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_0) = 0$，

并且当 $x \in [-\pi, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x \in (x_0, -\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x) > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, -\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

因为 $f(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$，$f(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 < 0$，

所以 $f(x) < 0$ 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 上恒成立， ......2 分

因为当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x) = e^x + \cos x > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增， ......4 分

因为 $f(0) = 0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点.

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点. ......5 分

（2）令 $g(x) = f(x) + mx = e^x + \sin x + mx - 1$，$x \in [0, +\infty)$，

所以 $g'(x) = e^x + \cos x + m$，

注意到 $g(0) = 0$，$g'(0) = 2 + m$. ......6 分

①当 $g'(0) < 0$，即 $m < -2$ 时，存在 $x_1 \in (0, +\infty)$，使得当 $x \in [0, x_1)$ 时，$g'(x) < 0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $[0, x_1)$ 上单调递减，

所以 $g(x_1) < g(0) = 0$，

此时 $g(x) \geqslant 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上不恒成立，不符合题意. ......8 分

②当 $g'(0) \geqslant 0$，即 $m \geqslant -2$ 时，

因为 $g''(x) = e^x - \sin x \geqslant 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，

所以 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x) \geqslant g'(0) \geqslant 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立， ......10 分

所以函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x) \geqslant g(0) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，符合题意.

综上所述，实数 m 的取值范围是 $[-2, +\infty)$. ......12 分

【解析】本题主要考查导数的计算和导数在研究函数中的应用.

（1）对函数 $f(x)$ 求导得到 $f'(x)$，可以判断出 $f'(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，从而可以判断出 $f'(x)$

的正负性，进而可以判断出 $f(x)$ 在 $[-\pi,-\frac{\pi}{2})$ 上的单调性，并可以判断出 $f(x)<0$ 在 $[-\pi,-\frac{\pi}{2})$ 上恒成立．再判断出 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增、$f(0)=0$，即可判断出 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点，从而可以得到函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\frac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点．

（2）令 $g(x)=f(x)+mx$，求导得到 $g'(x)$，可以发现 $g(0)=0$，$g'(0)=2+m$．分 $g'(0)<0$、$g'(0)\geqslant 0$ 两种情况讨论．当 $g'(0)<0$ 时，可以直接证明出 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上不恒成立，不符合题意．当 $g'(0)\geqslant 0$ 时，可以发现 $g'(x)\geqslant g'(0)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，可以得到函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，从而可以得到 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，符合题意．综上，便求出了实数 m 的取值范围．

22. **【答案】**（1）因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，且 $x=\rho\cos\theta$，

所以 $\rho=2+x$，

所以 $x^2+y^2=\rho^2=(2+x)^2$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4(x+1)$，　　......2 分

因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{3}t \end{cases}$，

所以直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$．　　......4 分

（2）联立 $\begin{cases} y^2=4(x+1) \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$ 得到 $3x^2-4x-4=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=\frac{4}{3}$，$x_1x_2=-\frac{4}{3}$，　　......6 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}|x_1-x_2|$

$=2|x_1-x_2|$

$=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=2\sqrt{(\frac{4}{3})^2-4\times(-\frac{4}{3})}$

$=\frac{16}{3}$，　　......8 分

因为点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{3-1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=1$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times 1=\frac{8}{3}$．　　......10 分

【解析】本题主要考查极坐标和参数方程．

（1）根据极坐标和直角坐标、参数方程和直角坐标方程的互化规则进行互化即可．

（2）联立曲线 C 和直线 l 的方程，可以求出 $|AB|$ 的值，再求出点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离，即可求出 $\triangle AMN$ 的面积．

23. **【答案】**（1）因为 $f(x)=|x-1|-2|x-2|$，

所以 $f(x)=\begin{cases} x-3, & (x<1) \\ 3x-5, & (1\leqslant x\leqslant 2), \\ -x+3, & (x>2) \end{cases}$ ......2 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减， ......3 分

所以 $f(x)_{\max}=f(2)=1$，

所以 $t=1$. ......5 分

（2）由（1）可得 $2a+b+2c=3$， ......6 分

所以由柯西不等式可得 $(2a+b+2c)^2\leqslant(2^2+1^2+2^2)(a^2+b^2+c^2)$，

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant 1$， ......8 分

当且仅当 $\frac{a}{2}=b=\frac{c}{2}$ 时可取等号，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$. ......10 分

【解析】本题主要考查求解绝对值不等式和柯西不等式.

（1）首先去掉函数 $f(x)$ 中的绝对值，然后判断出函数 $f(x)$ 的单调性，即可求出 $f(x)$ 的最大值，即 t 的值.

（2）使用柯西不等式可以直接证明出 $a^2+b^2+c^2\geqslant 1$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$.