绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试押题卷：老教材文科

文科数学

（考试时间：120分钟；试卷满分：150分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集为$\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x^2-5x+6<0\}$，$B=\{x|\ln x>1\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$ （　　）

A. $(e,3)$　　B. $(-\infty,e)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,e]\cup[3,+\infty)$

2. 已知复数z满足$(1+2i)z=i^{2023}$，则$|\bar{z}|=$ （　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 我国是人口大国，21世纪以来的22年中（2001—2022年），人口出生数量（万）的变化趋势如下图所示，则下列说法错误的是 （　　）

A. 22年中，人口出生数量的极差大于900万

座位号________　准考证号________

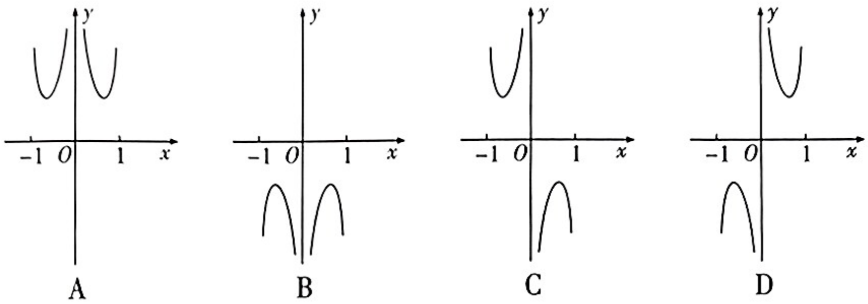
密　封　线　内　不　要　答　题

B. 22 年中，人口出生数量的中位数是 1 606 万

C. 22 年中，按平均数来考查，人口出生数量最近 4 年的平均数与最初 4 年的平均数之差的绝对值大于 500 万

D. 近 6 年，人口出生数量呈现逐年下降的趋势

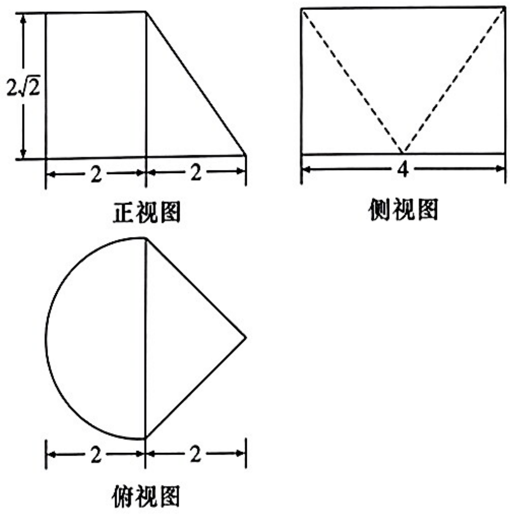
4. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x^2-1|}{x^3}$ 在区间 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上的大致图象为 ( )



5. 若 x,y 满足 $|x|\leqslant 3-y$，且 $y\geqslant -2$，则 $2x+3y$ 的最大值是 ( )

A. 4　　B. 6　　C. 9　　D. 16

6. 某几何体的三视图如图所示，该几何体的体积为 ( )



A. $2\sqrt{2}\pi+\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$　　B. $4\sqrt{2}\pi+\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$　　C. $2\sqrt{2}\pi+\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　D. $4\sqrt{2}\pi+\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

7. 已知 $\odot M$ 过点 $(1,0)$，且与直线 $x=-1$ 相切，S 是圆心 M 的轨迹上的动点，T 为直线 $x+y+4=0$ 上的动点，则 $|ST|$ 的最小值为 ( )

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，$y=f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称. 当 $x\in[0,1]$ 时，对任意 $k\in[0,1]$，$f(x)$ 满足 $f(kx)+1=[f(x)+1]^k$，且 $f(1)=-\frac{1}{2}$，则 $f\left(-\frac{9}{2}\right)=$ （　　）

A. $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 AD 的中点，F 是棱 C_1D_1 上的点，则 （　　）

A. 存在点 F，使得 $EF\perp AD$

B. 当点 F 位于 C_1D_1 的中点时，$EF\perp B_1D_1$

C. 当点 F 位于 C_1D_1 的中点时，在侧面 BCC_1B_1 内，存在唯一一条直线与平面 BEF 平行

D. 存在点 F，使得 $A_1C_1\perp$ 平面 BEF

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d$ 的极值点为 1 和 2，且 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，则 $\frac{c^2+5}{a+b}$ 的最小值为 （　　）

A. 4　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. $2\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x(\omega>0)$ 的零点是以 $\frac{\pi}{2}$ 为公差的等差数列. 若 $f(x)$ 在区间 $[0,\alpha]$ 上单调递增，则 α 的取值范围为 （　　）

A. $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right]$　　B. $\left(0,\frac{7\pi}{12}\right]$　　C. $\left(0,\frac{5\pi}{24}\right]$　　D. $\left(0,\frac{7\pi}{24}\right]$

12. 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的 4 个顶点均在球心为 O、直径为 $2\sqrt{3}$ 的球面上，$PA=\sqrt{2}$，且 PA,PB,PC 两两垂直. 当 $PC+AB$ 取最大值时，三棱锥 $O\text{-}PAB$ 的体积为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 从 4,5,6,7 这 4 个数字中选出 3 个不同的数字组成一个三位数，百位上的数字是质数、个位上的数字是合数的概率为________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $2a\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}b$，则 $\angle A=$________.

15. 已知 O 为坐标原点，过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB$，则 p 的值为________.

16. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，当向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角最大时，向量 $\boldsymbol{b}$ 的模为________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17.(12 分)为了落实国家“双减”政策,需要加强中小学作业管理,真正地实现“减负增效”. 为了解实情,某教育集团随机抽检某一学区小学生的作业情况,该学区共有 20 000 名小学生,其中低年级(1—3 年级)有 9 000 名学生,其余学生为高年级(4—6 年级). 现按高、低年级分层抽取若干名学生进行问卷调查,已知高年级抽取 550 名学生,根据问卷调查的学生对作业“多与少”的看法,得到下表:

单位:人

年级	看法		合计
	认为作业多	认为作业少	
低年级		150	
高年级	200		
合计			

(1)请将上述表格补充完整;

(2)是否有 99.9% 的把握认为作业量与年级的高低有关?

(3)为进一步了解作业多的情况,从问卷调查中“认为作业多”的学生中按高、低年级分层抽取 5 名学生,再从这 5 名学生中随机抽取 2 人深入访谈,求抽取的 2 人中至少有 1 人是高年级的学生的概率.

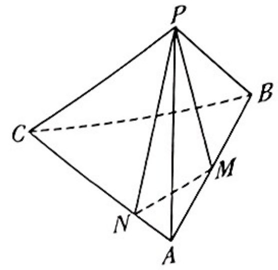
附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2 \geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18. (12 分)如图,在三棱锥 P-ABC 中,$\triangle PAB$ 为等边三角形,$BC\perp$平面 PAB,$AB=BC=4$,M 是 AB 的中点,N 在棱 AC 上,且 $CN=3NA$.

(1)证明:$AC\perp$平面 PMN;

(2)求四棱锥 P-$BCNM$ 的体积.



19. (12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$,$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n, n\text{ 为奇数},\\ a_n+\dfrac{1}{2}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)记 $b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$,证明:数列$\{b_n\}$为等比数列;

(2)记 $c_n=a_{2n}-\dfrac{1}{2}$,求数列$\{nc_n\}$的前 n 项和 T_n.

20. (12 分)已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+ax+\frac{1}{2}x^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=-1$时,判断$f(x)$的单调性;

(2)当$x\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant\frac{3}{2}x^2+3ax+a^2-2\mathrm{e}^x$恒成立,求实数$a$的取值范围.

21. (12 分)已知O为坐标原点,双曲线$C:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{m^2-2}=1(m>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

(1)求C的标准方程;

(2)过点$P(1,\sqrt{3})$的直线l交C于M,N两点,交x轴于Q点.若$|PM|\cdot|PN|=36$,问$\tan\angle OPQ$是否存在?若存在,求出$\tan\angle OPQ$的值;若不存在,请说明理由.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.【选修 4-4:坐标系与参数方程】(10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t}-1, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{1+t}+\sqrt{3} \end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,得到曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$.

(1)求直线 l 的极坐标方程和曲线 C_1 的直角坐标方程;

(2)若曲线 C_1 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y \end{cases}$ 得到曲线 C_2,直线 l 与 C_2 交于 A,B 两点,求 $\triangle AOB$ 的面积.

23.【选修4-5：不等式选讲】(10分)

已知函数$f(x)=|2x-a|-|x-2|(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=1$时，解不等式$f(x)\leqslant 1$；

(2)记$f(x)$的最小值为$\varphi(a)$，当$\varphi(a)\in[-1,1]$时，求a的取值范围.