绝密★启用前

2023 年普通高等学校招生全国统一考试押题卷:老教材理科

理科数学

(考试时间:120 分钟;试卷满分:150 分)

座位号＿＿＿ 准考证号＿＿＿ 姓名＿＿＿ 班级＿＿＿ 学校＿＿＿

密封线内不要答题

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|y=\ln(x-2)\}$,$B=\{y|y=e^x-1\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ ( )

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $(-1,2)$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{1-i}{1+i}-z=1$,则 $|2+i\bar{z}|=$ ( )

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

3. 我国是人口大国,21 世纪以来的 22 年中(2001—2022 年),人口出生数量(万)的变化趋势如下图所示,则下列说法错误的是 ( )

A. 22 年中,人口出生数量的极差大于 900 万

B. 22 年中,人口出生数量的中位数是 1 606 万

C. 22 年中,按平均数来考查,人口出生数量最近 4 年的平均数与最初 4 年的平均数之差的绝对值大于 500 万

D. 近 6 年,人口出生数量呈现逐年下降的趋势

4. 已知 $a=\log_3 7$, $b=3\ln 2$, $c=\sqrt[5]{6}$, 则 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $b>c>a$

5. 大雁塔是佛塔这种古印度佛教的建筑形式随佛教传入中原地区，并融入华夏文化的典型物证，是现存最早、规模最大的唐代四方楼阁式砖塔(如图 1 所示). 2014 年，它作为中国、哈萨克斯坦和吉尔吉斯斯坦三国联合申遗“丝绸之路”中的一处遗址点，被列入《世界遗产名录》. 大雁塔由塔基、塔身、塔刹三部分组成(如图 2 所示)，全塔通高 64.7 m. 塔基为长方体，高约为 4 m，南北长约为 48 m，东西长约为 45.5 m；塔身近似呈正四棱台，底层边长约为 24 m，侧面是底角约为 81.95°的等腰梯形；塔刹高约 4.7 m. 则大雁塔塔基与塔身的体积之比为(参考数据: $\tan 81.95° \approx 5\sqrt{2}$) (　　)

图 1

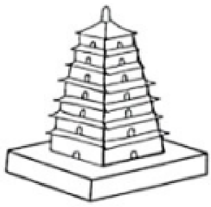
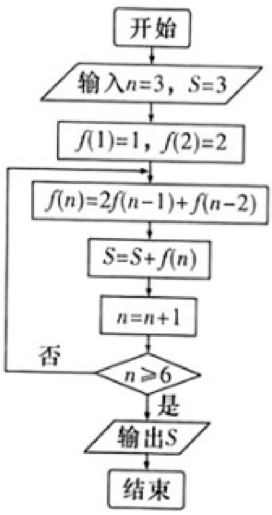


图 2

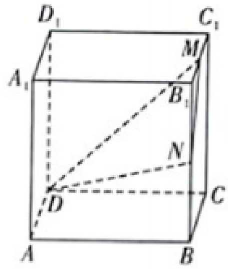
A. 4∶7　　B. 5∶11　　C. 7∶13　　D. 9∶16

6. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $S=$ (　　)



A. 20　　B. 49　　C. 70　　D. 119

7. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 是 B_1C_1 的中点，N 是 BB_1 的中点，平面 MND 与棱 C_1D_1 交于点 P，则下列结论不正确的是 (　　)



A. $MN//$平面 AD_1C

B. $CN\perp$平面 ABM

C. 三棱锥 $N\text{-}AMB$ 的体积为$\frac{1}{2}$

D. $D_1P=2PC_1$

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_5=2S_2$,$S_4=26$. 若$S_n\leqslant 100$,则n的最大值为 ( )

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

9. 已知三棱锥$P\text{-}ABC$的4个顶点均在球心为O、直径为$2\sqrt{3}$的球面上,$PA=\sqrt{2}$,且PA,PB,PC两两垂直. 当$PC+AB$取最大值时,三棱锥$O\text{-}PAB$的体积为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

10. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d$的极值点为1和2,且$f(x)$在$(1,2)$上单调递增,则$\frac{c^2+5}{a+b}$的最小值为 ( )

A. 4　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. $2\sqrt{5}$

11. 已知O为坐标原点,F_1,F_2分别是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$的左、右焦点,过$F_1$且斜率为$\frac{1}{3}$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A,B$两点(点$A$在第二象限),且四边形$OABF_2$是梯形,则$\frac{|AF_1|}{|BF_2|}=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

12. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(-x)+f(x)=0$,$y=f(x+1)$的图象关于y轴对称. 当$x\in[0,1]$时,对任意$k\in[0,1]$,$f(x)$满足$f(kx)+1=[f(x)+1]^k$,且$f(1)=-\frac{1}{2}$,则$f\left(-\frac{9}{2}\right)=$ ( )

A. $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 一个圆的圆周上均匀分布6个点,在这些点与圆心共7个点中,任取3个点,这3个点能构成等边三角形的概率为________.

14. 已知平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,当向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与向量$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角最大时,向量$\boldsymbol{b}$的模为________.

15. 已知O为坐标原点,M是抛物线$y^2=-4x$准线上的一点,点P在圆$(x+1)^2+y^2=4$上. 若MP的中点在圆$x^2+(y-2)^2=1$上,则$|OM|$的取值范围为________.

16. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x(\omega>0)$的零点是以$\frac{\pi}{2}$为公差的等差数列. 若$f(x)$在区间$[0,\alpha]$上单调递增,则$\alpha$的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）在锐角$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=b\sin\frac{\pi}{3}$.

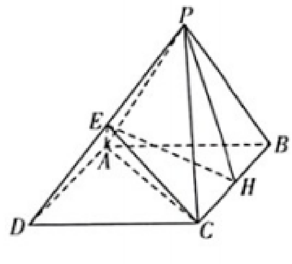
（1）求$\tan\frac{A}{4}$；

（2）求$\frac{\cos B-\cos C}{\sin B+\sin C}$的取值范围.

18.（12 分）如图，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面是边长为 4 的菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，H为BC的中点，$PA=PB=PH=2\sqrt{2}$. E为PD上的一点，且EH与平面$ABCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（1）证明：平面$PAB\perp$平面$ABCD$；

（2）试确定$\frac{|PE|}{|PD|}$的值，并求出平面EAC与平面PAB所成二面角的正弦值.



19.（12 分）第 31 届世界大学生夏季运动会将于今年在我国成都举行. 某体校田径队正在积极备战，考核设有 100 米、400 米和 1 500 米三个项目，需要选手依次完成考核，成绩合格后的积分分别记为 p_1, p_2 和 p_3（$p_i > 0, i = 1, 2, 3$），总成绩为累计积分和. 考核规定：项目考核逐级进阶，即选手只有在低一级里程项目考核合格后，才能进行下一级较高里程项目的考核，否则考核终止. 对于 100 米和 400 米项目，每个项目选手必须考核 2 次，且全部达标才算合格；对于 1 500 米项目，选手必须考核 3 次，但只要达标 2 次及以上就算合格. 已知选手甲三个项目的达标率依次为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$，选手乙三个项目的达标率依次为 $\frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$，每次考核是否达标相互独立.

（1）用 ξ 表示选手甲考核积分的总成绩，求 ξ 的分布列和数学期望；

（2）证明：无论 p_1, p_2 和 p_3 取何值，选手甲考核积分总成绩的数学期望值都大于选手乙考核积分总成绩的数学期望值.

20. (12 分) 已知 O 为坐标原点，双曲线 $C:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{m^2-2}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

(1) 求 C 的标准方程；

(2) 过点 $P(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 交 C 于 M,N 两点，交 x 轴于 Q 点. 若 $|PM|\cdot|PN|=36$，问 $\tan\angle OPQ$ 是否存在？若存在，求出 $\tan\angle OPQ$ 的值；若不存在，请说明理由.

21.(12分)已知函数$f(x)=x(\mathrm{e}^{\sin x}-x\ln(x+1))$,$g(x)=\mathrm{e}^{x}-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论$g(x)$的极值;

(2)若$a=1$,$x\in(0,1)$,求证:$f(x)>g(x)$.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.【选修4-4:坐标系与参数方程】(10分)

在平面直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t}-1, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{1+t}+\sqrt{3} \end{cases}$($t$为参数),以坐标原点为极点,$x$轴非负半轴为极轴建立极坐标系,得到曲线$C_1$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{2}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$.

(1)求直线l的极坐标方程和曲线C_1的直角坐标方程;

(2)若曲线C_1经过伸缩变换$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y \end{cases}$得到曲线$C_2$,直线$l$与$C_2$交于$A,B$两点,求$\triangle AOB$的面积.

23.【选修4-5:不等式选讲】(10分)

已知函数$f(x)=\max\{-x^2+2x,-x+1,x-2\}$.

(1)求$f(x)$的最小值;

(2)若$f(x)\geqslant k|x|-1$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立,求k的取值范围.