

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学风向卷（二）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|x\leq m\}$ ， $N=\left\{x|y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}\right\}$.若 $M\cup N=\mathbf{R}$ ，则实数 m 的取值范围是()
- A. $[-1, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, 4]$

【答案】B

【详解】本题考查函数的定义域、根据集合的并集运算求参数的范围. $N=\{x|x^2-3x-4>0\}=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>4\}$ ，则由 $M\cup N=\mathbf{R}$ ，得 $m\geq 4$ ，故选 B.

【一题多解】若 $m=-1$ ，则 $0\notin M$ ，又 $0\notin N$ ，所以 $M\cup N\neq\mathbf{R}$ ，故排除 A，C，D，故选 B.

2. 设 i 为虚数单位，复数 z_0 在复平面内对应的点为 $Z_0(1, 2)$ ，且 $z_0\cdot z=3+i$ ，则 $|z|=()$
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】B

【详解】本题考查复数的运算及几何意义、复数模的运算. 由题意知 $z_0=1+2i$ ，所以 $z=\frac{3+i}{z_0}=\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i$ ，所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ ，故选 B.

【一题多解】由题意知 $|z_0|=\sqrt{5}$ ，所以由 $z_0\cdot z=3+i$ ，得 $|z_0|\cdot|z|=|3+i|$ ，即 $\sqrt{5}|z|=\sqrt{10}$ ，即 $|z|=\sqrt{2}$ ，故选 B.

3. 已知 $\left(a^2+\frac{2}{a}\right)^n$ 的展开式中最后三项的二项式系数之和为 16，则展开式中 a^4 的系数为()
- A. 20 B. 40 C. 60 D. 80

【答案】B

【考点】二项式定理及其应用

【详解】由二项式系数的性质可知，最后三项的二项式系数之和与前三项二项式系数之和相等，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2=16$ ，即 $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ ，整理得 $n^2+n-30=0$ ，解得 $n=5$ 或 $n=-6$ (舍去). 二项展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r(a^2)^{5-r}\left(\frac{2}{a}\right)^r=C_5^r2^ra^{10-3r}$ ，令 $10-3r=4$ ，解得 $r=2$ ，所以 a^4 的系数为 $C_5^22^2=40$ ，故选 B.

4. 某新能源汽车生产公司，为了研究某生产环节中两个变量 x, y 之间的相关关系，统计样本数据得到如下表格：

x_i	20	23	25	27	30
y_i	2	2.4	3	3	4.6

由表格中的数据可以得到 y 与 x 的经验回归方程为 $y=\frac{1}{4}x+a$ ，据此计算，下列选项中残差的绝对值最小的样本数据是()

- A. (30, 4.6)
- B. (27, 3)
- C. (25, 3)
- D. (23, 2.4)

【答案】C

【考点】回归分析

【详解】由题表中的数据可知， $x=\frac{1}{5}\times(20+23+25+27+30)=25$ ， $y=\frac{1}{5}\times(2+2.4+3+3+4.6)=3$ ，点 $(25, 3)$ 在经验回归直线 $y=\frac{1}{4}x+a$ 上，故 $a=-\frac{13}{4}$ ，则 $y=\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}$.当 $x=30$ 时， $y=4.25$ ，残差的绝对值为0.35；当 $x=27$ 时， $y=3.5$ ，残差的绝对值为0.5；当 $x=25$ 时， $y=3$ ，残差的绝对值为0；当 $x=23$ 时， $y=2.5$ ，残差的绝对值为0.1.故选C.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，且 a_2 为 a_1, a_3+1 的等比中项，则数列 $\{a_n\}$ 的前10项和为()

- A. 88
- B. 108
- C. 130
- D. 154

【答案】C

【考点】数列的基本概念与等差数列的求和公式

【详解】依题意可知， $a_2^2=a_1\cdot(a_3+1)$ ，即 $(a_1+2)^2=a_1\cdot(a_1+4+1)$ ，解得 $a_1=4$ ，则其前10项和 $S_{10}=10\times 4+\frac{10\times 9}{2}\times 2=130$.故选C.

【一题多解】依题意， $a_2^2=(a_2-2)\cdot(a_2+3)$ ，解得 $a_2=6$ ， $a_9=a_2+7d=6+14=20$ ，则其前10项和 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_2+a_9)}{2}=130$.

6. 已知 $\alpha\in(0, \pi)$ ，且 $3\cos 2\alpha+11=16\cos \alpha$ ，则 $\sin 2\alpha=$ ()

- A. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$
- C. $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$
- D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

【答案】D

【详解】本题考查三角恒等变换. 由 $3\cos 2\alpha+11=16\cos \alpha$ ，得 $3(2\cos^2\alpha-1)-16\cos \alpha+11=0$ ，即 $3\cos^2\alpha-8\cos \alpha+4=0$ ，解得 $\cos \alpha=2$ (舍去)或 $\cos \alpha=\frac{2}{3}$.

$\because \alpha\in(0, \pi)$ ， $\therefore \sin \alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，

故 $\sin 2\alpha=2\sin \alpha\cos \alpha=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.故选D.

7. 已知平面向量 a, b, c 满足 $|b|=|c|=b\cdot c=2$ ，且 $(b-a)\perp(a-3b)$ ，则 $|a-c|$ 的最大值为()

- A. $-\sqrt{3}+4$
- B. $\sqrt{3}+4$
- C. $2\sqrt{3}-2$
- D. $2\sqrt{3}+2$

【答案】D

【考点】平面向量的数量积以及模的运算

【详解】因为 $|b|=|c|=b\cdot c=2$ ，所以 $\cos \langle b, c \rangle =\frac{b\cdot c}{|b||c|}=\frac{1}{2}$ ，所以向量 b, c 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.不妨设 $\vec{OA}=a$ ， $\vec{OB}=b$ ， $\vec{OC}=c$ ，以 O 为坐标原点， $\vec{OC}$ 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系(图略)，则 $C(2, 0)$ ， $B(1, \sqrt{3})$ 或 $B(1, -\sqrt{3})$ ，设 $A(x, y)$ ，当 B 点坐标为 $(1, \sqrt{3})$ 时，因为 $(b-a)\perp(a-3b)$ ，所以 $(b-a)\cdot(a-3b)=0$ ，即 $(1-x, \sqrt{3}-y)\cdot(x-3, y-3\sqrt{3})=0$ ，即 $(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=4$ ，所以 A 点轨迹是以 $(2, 2\sqrt{3})$ 为圆心，半径为2的圆，所以 $|a-c|$ 的最大值为 $\sqrt{(2-2)^2+(2\sqrt{3}-0)^2}+2=2\sqrt{3}+2$ ，同理，当 B 点坐标为 $(1, -\sqrt{3})$ 时， $|a-c|$ 的最大值为 $2\sqrt{3}+2$.故选D.

8. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点，经过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点， D 为线段 AB 的中点，且 $F_1D\perp l$ ， $4|F_2B|=|AB|$ ，则双曲线 C 的离心率为()

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$
- B. $\sqrt{3}$
- C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$
- D. 2

【答案】C

【分析】连接 AF_1 ， BF_1 ， $F_1D\perp l$ 为线段 AB 的中点 $\rightarrow|AF_1|=|BF_1|$ 根据双曲线定义 $\rightarrow|BF_1|=t+2a$ ， $|AF_1|=5t-2a\rightarrow|F_1D|=\sqrt{5}a\rightarrow 5a^2+9a^2=4c^2\rightarrow e=\frac{\sqrt{14}}{2}$

【考点】双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系

【详解】依题意，不妨设 $4|F_2B|=|AB|=4t(t>0)$ ，连接 AF_1, BF_1 (图略)，因为 D 为线段 AB 的中点，且 $F_1D\perp l$ ，所以 $|AF_1|=|BF_1|$.由双曲线定义可得 $|BF_1|=t+2a$ ， $|AF_1|=5t-2a$ ，所以 $t+2a$

$=5t-2a$ ，解得 $t=a$ 。在 $Rt\triangle F_1DB$ 中， $|F_1D|=\sqrt{|BF_1|^2-|DB|^2}=\sqrt{5}a$ ，在 $Rt\triangle F_1DF_2$ 中， $|F_1D|^2+|DF_2|^2=|F_1F_2|^2$ ，即 $5a^2+9a^2=4c^2$ ，所以离心率 $e=\frac{\sqrt{14}}{2}$ ，故选 C。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列不等式成立的是()

- A. $\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$
- B. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\pi^{\frac{1}{2}}$
- C. $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$
- D. $\log_4 3<\log_6 5$

【答案】BCD

【详解】本题考查函数的性质以及大小比较。

对于 A， $\because 0<\sin 1<1$ ， $\therefore \log_2(\sin 1)<0$ ， $2^{\sin 1}>1$ ，

$\therefore \log_2(\sin 1)<2^{\sin 1}$ ，故 A 错误；

对于 B， $\because \left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\left(\frac{1}{\pi}\right)^0=1$ ， $\pi^{\frac{1}{2}}>\pi^0=1$ ， $\therefore \left(\frac{1}{\pi}\right)^2<\pi^{\frac{1}{2}}$ ，故 B 正确；

对于 C， $\because \sqrt{7}-\sqrt{5}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ ， $\sqrt{6}-2=\frac{2}{\sqrt{6}+2}$ ，且 $\sqrt{7}+\sqrt{5}>\sqrt{6}+2$ ，

$\therefore \sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$ ，故 C 正确；

对于 D， $\because \log_3 4=\log_3 3+\log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{3}=1+\log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{3}$ ， $\log_5 6=\log_5 5+\log_{\frac{6}{5}} \frac{6}{5}=1+\log_{\frac{6}{5}} \frac{6}{5}$ ，又 $\log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{3}>\log_{\frac{6}{5}} \frac{6}{5}=\frac{\log_5 6}{\log_5 3}$
 $>\log_{\frac{6}{5}} \frac{6}{5}$ ， $\therefore \log_3 4>\log_5 6$ ，则 $\frac{1}{\log_3 4}<\frac{1}{\log_5 6}$ ， $\therefore \log_4 3<\log_6 5$ ，故 D 正确。

故选 BCD。

10. 记 T 为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期，且 $T\in(2, 3)$ ，函数在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处取得最大值 3，则()

- A. $b=3$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{4\pi}{5}$

C. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$ 上单调递减

D. 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后与函数 $y=-\sin \frac{5}{2}x$ 的图像重合

【答案】BCD

【考点】三角函数的图像及其性质

【详解】对于 A 选项，依题意，因为函数在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处取得最大值 3，所以 $b=2$ ，所以 A 选项不正确；

对于 B 选项，由 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi$ ， $k\in\mathbf{Z}$ ，得 $\omega=\frac{4k}{3}-\frac{1}{6}$ ， $k\in\mathbf{Z}$ ，又 $T\in(2, 3)$ ，所以 $\omega\in\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ ，所以 $\omega=\frac{5}{2}$ ，所以 $f(x)=\cos\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ ，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}}=\frac{4\pi}{5}$ ，所以 B 选项正确；

对于 C 选项，当 $x\in\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$ 时， $\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 C 选项正确；

对于 D 选项，将 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度得 $y=\cos\left[\frac{5}{2}\left(x+\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+2=\cos\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+2=-\sin \frac{5}{2}x+2$ 的图像，再向下平移 2 个单位长度后得 $y=-\sin \frac{5}{2}x$ 的图像，所以 D 选项正确。

11. 已知圆 $C: x^2+y^2-2x\cos \theta-2y\sin \theta-3=0$ ， $\theta\in\mathbf{R}$ ，则()

- A. 圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相内切
- B. 直线 $x\cos \alpha+y\sin \alpha-3=0(\alpha\in\mathbf{R})$ 与圆 C 相离
- C. 圆 C 上到直线 $x+y=0$ 的距离等于 2 的点只有两个
- D. 过直线 $x+y=4\sqrt{2}$ 上任一点 M 作圆 C 的切线，切点分别为 E, F ，则四边形 $MECF$ 面积的最小值为 $2\sqrt{5}$

【答案】ACD

【考点】直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系

【详解】对于 A 选项，依题意，圆 C 的标准方程为 $(x-\cos \theta)^2+(y-\sin \theta)^2=4$ ， $\theta\in\mathbf{R}$ ，圆心 $C(\cos \theta, \sin \theta)$ ，半径为 2，而圆心 C 的轨迹为单位圆 $x^2+y^2=1$ ，所以圆 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 相内切，所以 A 选项正确；

对于 B 选项，圆心 $C(\cos \theta, \sin \theta)$ 到直线 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - 3 = 0 (\alpha \in R)$ 的距离 $d =$

$$\frac{|\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha - 3|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = |\cos(\theta - \alpha) - 3| \in [2, 4] \text{ (提示: 通过圆心到直线的距离及圆的半径判断直线与圆的位置关系), 当 } d = 2 \text{ 时, 直线与圆 } C \text{ 相切, 所以 B 选项不正确;}$$

对于 C 选项，圆心 $C(\cos \theta, \sin \theta)$ 到直线 $x + y = 0$ 的距离 $d' = \frac{|\cos \theta + \sin \theta|}{\sqrt{2}} = |\sin(\theta + \frac{\pi}{4})| \in [0, 1]$,

则圆 C 上到直线 $x + y = 0$ 的距离等于 2 的点只有两个，所以 C 选项正确;

对于 D 选项，四边形 $MECF$ 的面积 $S = 2S_{\triangle MEC} = 2 \times \frac{1}{2} \times |EC| \times |ME| = 2|ME|$,

又 $|ME| = \sqrt{|MC|^2 - |CE|^2} = \sqrt{|MC|^2 - 4}$,

$$|MC| = \frac{|\cos \theta + \sin \theta - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = |\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 4| \in [3, 5],$$

$$|MC| = \frac{|\cos \theta + \sin \theta - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = |\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 4| \in [3, 5],$$

所以 $|MC|_{\min} = 3$ ，所以四边形 $MECF$ 的面积的最小值为 $2|ME| = 2\sqrt{3^2 - 4} = 2\sqrt{5}$ ，所以 D 选项正确.

12. 已知球 O 的表面积为 36π ，正四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点均在球 O 的表面上，设 $AB = a$ ，则 ()

- A. 当 $a = 3\sqrt{2}$ 时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积为 $18\sqrt{3}$
- B. 当 $a = 3\sqrt{2}$ 时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$
- C. 当 $a \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ 时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最小值为 $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$
- D. 当 $a \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ 时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最大值为 18

【答案】AC

【分析】球 O 的表面积为 $36\pi \rightarrow$ 球 O 的半径 $R = 3 \rightarrow$ 设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 $h \rightarrow$ 对于 A 选项和 B 选项，可以直接求得其侧面积以及侧面与底面所成角的正切值；对于 C 选项和 D 选项，对球心的位置进行分类讨论，再根据体积的函数表达式，通过导数求得最值

【考点】正四棱锥及其外接球

【详解】设球 O 的半径为 R ，则 $4\pi R^2 = 36\pi$ ，解得 $R = 3$ ，设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 h . 对于 A 选项和 B 选项， $AB = a = 3\sqrt{2}$ ，所以 $BD = 6$ ，即为球 O 的直径，此时球心 O 即为正方形 $ABCD$ 的中心，此时侧棱长 $SA = 3\sqrt{2}$ ，即正四棱锥侧面是边长为 $3\sqrt{2}$ 的正三角形，所以正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面积为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}$. 取 AB 的中点 E ，连接 SE ， OE ， SO (图略)，易

知 $\angle SEO$ 即为正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面与底面所成角的平面角， $\tan \angle SEO = \frac{SO}{OE} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$ ，所

以 A 选项正确，B 选项不正确. 对于 C 选项和 D 选项，当正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面和顶点

$$\text{在球心的同侧时, } h = 3 - \sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = 3 - \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}},$$

$$\text{此时正四棱锥 } S-ABCD \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \times a^2 \times \left(3 - \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}}\right).$$

$$\text{令 } \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}} = t, t \in [0, 2\sqrt{2}], \text{ 所以 } a^2 = 18 - 2t^2, t \in [0, 2\sqrt{2}],$$

$$\text{所以 } V = f(t) = \left(6 - \frac{2}{3}t^2\right)(3 - t) = 18 - 6t - 2t^2 + \frac{2}{3}t^3, t \in [0, 2\sqrt{2}].$$

$f'(t) = -6 - 4t + 2t^2 = 2(t - 3)(t + 1)$ ，则 $f'(t) < 0$ ，函数 $f(t)$ 在 $[0, 2\sqrt{2}]$ 上单调递减，所以函数 $f(t)$

在 $t = 2\sqrt{2}$ 处取得最小值 $f(2\sqrt{2}) = 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，最大值为 $f(0) = 18$ ，即正四棱锥 $S-ABCD$ 体积的最大值为 18，最小值为 $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{当正四棱锥 } S-ABCD \text{ 的底面和顶点在球心的两侧时, } h = 3 + \sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = 3 + \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}},$$

$$\text{此时正四棱锥 } S-ABCD \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \times a^2 \times \left(3 + \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}}\right),$$

$$\text{令 } \sqrt{9 - \frac{a^2}{2}} = m, m \in [0, 2\sqrt{2}], \text{ 所以 } a^2 = 18 - 2m^2, m \in [0, 2\sqrt{2}],$$

$$\text{所以 } V = g(m) = \left(6 - \frac{2}{3}m^2\right)(3 + m) = 18 + 6m - 2m^2 - \frac{2}{3}m^3,$$

$g'(m) = 6 - 4m - 2m^2 = -2(m - 1)(m + 3)$ ，当 $m \in (0, 1)$ 时， $g'(m) > 0$ ，函数 $g(m)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，当 $m \in (1, 2\sqrt{2})$ 时， $g'(m) < 0$ ，函数 $g(m)$ 在 $(1, 2\sqrt{2})$ 上单调递减，所以函数 $g(m)$ 在 $m = 1$ 处取得极大值 $g(1) = \frac{64}{3}$ ，且 $g(0) = 18$ ， $g(2\sqrt{2}) = 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，即正四棱锥 $S-ABCD$ 体积的最大值为 $\frac{64}{3}$ ，最小值为 $2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

综上，当 $a \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ 时，正四棱锥 $S-ABCD$ 的体积的最小值为 $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，最大值为 $\frac{64}{3}$ ，所以 C 选项正确，D 选项不正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(X \geq 5) = P(X \leq -1) = 0.2$, 则 $P(-1 < X < 2) =$ _____.

【答案】0.3

【详解】本题考查正态分布. 由题意, 随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(X \geq 5) = P(X \leq -1) = 0.2$, 根据正态分布曲线的对称性, 可得 $\mu = \frac{5+(-1)}{2} = 2$, $\therefore P(-1 < X < 2) = \frac{1}{2} - P(X \leq -1) = 0.5 - 0.2 = 0.3$.

【点睛】考虑有关正态分布的概率问题时, 利用正态分布曲线的对称性可以简化运算.

14. 已知曲线 $y = f(x) = (x-a)e^x$ 在 $x = -1$ 处的切线与直线 $y = -2x + 1$ 垂直, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 $-\frac{e}{2}$

【考点】导数的几何意义、两直线的位置关系

【详解】依题意可得 $f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x$, $f'(-1) = -\frac{a}{e}$, 又 $f'(-1) \times (-2) = -1$, 所以 $a = -\frac{e}{2}$.

15. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为棱 B_1C_1 的中点, N 为底面 $ABCD$ 上一动点, 且直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 则动点 N 的轨迹的长度为 _____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

【考点】直线与平面所成角, 动点的轨迹长度

【详解】取棱 BC 的中点 E , 连接 ME , EN (图略), 则 $ME \perp$ 底面 $ABCD$, 即 $\angle MNE$ 就是直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成角, 即 $\angle MNE = \frac{\pi}{3}$. 在 $Rt\triangle MEN$ 中, $ME = 2$, $\angle MNE = \frac{\pi}{3}$, $NE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以点 N 的轨迹是以 E 为圆心, 半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的圆在底面正方形 $ABCD$ 内的部分. 不妨设圆 E 与棱 AB , CD 的交点分别为 F , H , 连接 EF (图略), 所以 $\cos \angle BEF = \frac{BE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle BEF = \frac{\pi}{6}$, 根据对称性, 知 $\angle HEC = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle HEF = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 因此动点 N 的轨迹的长度为 $\frac{2\pi}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$.

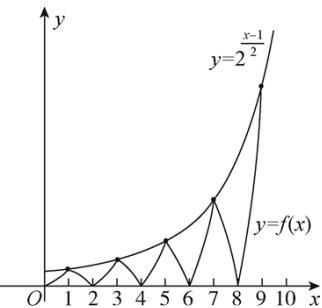
16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 且 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \in [0, 1), \\ \log_2(3-x), & x \in [1, 2), \\ 2f(x-2), & x \in [2, +\infty), \end{cases}$ 函数 $g(x) = f(x) - 2^{\frac{x-1}{2}}$ 在

区间 $[0, a]$ 内的所有零点为 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$. 若 $\sum_{i=1}^n x_i = 16$, 则实数 a 的取值范围是

_____.

【答案】 $[7, 9)$

【分析】函数 $g(x) = f(x) - 2^{\frac{x-1}{2}}$ 的零点问题 $\rightarrow y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{\frac{x-1}{2}}$ 的图像的交点横坐标问题 $\rightarrow$ 作出函数 $y = f(x)$ 和 $y = 2^{\frac{x-1}{2}}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的图像 $\rightarrow$ 数形结合得出结果



【考点】函数零点问题

【详解】函数 $g(x) = f(x) - 2^{\frac{x-1}{2}}$ 的零点转化为函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{\frac{x-1}{2}}$ 的图像的交点横坐标问题. 作出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 2)$ 上的图像, 又当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 2f(x-2)$, 所以当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}f(x+2)$, 其图像如图所示.

作出 $y = 2^{\frac{x-1}{2}}$, $x \geq 0$ 的图像, 由图像可得, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $\dots$, 若 $\sum_{i=1}^n x_i = 16$, 则 $n = 4$, 即 $x_4 = 7$, 故实数 a 的取值范围是 $[7, 9)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$, $3a_2 = a_4 + 2$, $a_2a_3 = a_8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_{n+1} - a_n > 0$, 且数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = a_1$, $b_{n+1} = \begin{cases} a_n n \text{ 为奇数}, \\ 2^n - b_n n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 14 项的和.

【考点】等差数列的通项公式, 数列奇、偶项求和

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 依题意有 $\begin{cases} 3(a_1 + d) = a_1 + 3d + 2, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = a_1 + 7d, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 0, \end{cases}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ 或 $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) 若 $a_{n+1} - a_n > 0$, 则 $a_n = 2n - 1$, $b_1 = a_1 = 1$,

所以 $b_{n+1} = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数}, \\ 2^n - b_n, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

所以 $b_2 = a_1 = 1, \quad b_3 = 2^2 - b_2, \quad b_3 + b_2 = 2^2; \quad b_5 = 2^4 - b_4, \quad b_5 + b_4 = 2^4;$

$b_7 = 2^6 - b_6, \quad b_7 + b_6 = 2^6; \quad b_9 = 2^8 - b_8, \quad b_9 + b_8 = 2^8;$

$b_{11} = 2^{10} - b_{10}, \quad b_{11} + b_{10} = 2^{10}; \quad b_{13} = 2^{12} - b_{12}, \quad b_{13} + b_{12} = 2^{12};$

$b_{14} = a_{13} = 25.$

则数列 $\{b_n\}$ 的前 14 项的和

$S_{14} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \dots + b_{12} + b_{13} + b_{14}$

$= b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5) + \dots + (b_{12} + b_{13}) + b_{14}$

$= 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{12} + 25$

$= \frac{1 \times (1 - 4^7)}{1 - 2^2} + 25$

$= \frac{4^7 + 74}{3} = 5\,486.$

18. (12 分)已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $B = 2C, C \neq A$.

(1)证明: $b^2 - c^2 = ac$;

(2)若 AC 边上的中线 $BD = \sqrt{2}a$, 求 $\tan \angle ABC$.

【考点】利用正弦定理、余弦定理解三角形

【详解】

(1)在 $\triangle ABC$ 中, $B = 2C$, 则 $\sin B = \sin 2C = 2\sin C \cos C$, 则 $b = 2c \cos C$.

又 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 所以 $b = 2c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

整理得 $ab^2 = a^2c + b^2c - c^3$,

即 $(a - c)b^2 = c(a^2 - c^2), \quad (a - c)b^2 = c(a - c)(a + c),$

因为 $C \neq A$, 所以 $a \neq c$, 所以 $b^2 = c^2 + ac$, 即 $b^2 - c^2 = ac$.

(2)依题意, $2\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{BA}$, 则 $4\vec{BD}^2 = (\vec{BC} + \vec{BA})^2 = a^2 + c^2 + 2accos \angle ABC$

即 $8a^2 = a^2 + c^2 + 2accos \angle ABC$, 所以 $\frac{7a^2 - c^2}{2ac} = \cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

所以 $c^2 - ac - 6a^2 = (c + 2a)(c - 3a) = 0$, 所以 $c = -2a$ (舍)或 $c = 3a$,

则 $b = 2\sqrt{3}a$,

$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{3}$, 所以 $\tan \angle ABC = -2\sqrt{2}$.

19. (12 分)“坚持‘五育’并举, 全面发展素质教育, 强化体育锻炼”是我们现阶段教育必须坚持的. 某高中学校鼓励学生自发组织各项体育比赛活动, 甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛, 规定: 每一局比赛中获胜方记 1 分, 失败方记 0 分, 没有平局, 首先获得 5 分者获胜, 比赛结束. 假设每局比赛甲获胜的概率都是 $\frac{3}{5}$.

(1)求比赛结束时恰好打了 6 局的概率;

(2)若甲以 3 : 1 的比分领先时, 记 X 表示到比赛结束时还需要比赛的局数, 求 X 的分布列及数学期望.

【考点】本题考查离散型随机变量的分布列以及数学期望.

【详解】(1)比赛结束时恰好打了 6 局,

甲获胜的概率 $P_1 = C_5^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{486}{3125}$,

乙获胜的概率 $P_2 = C_5^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^4 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{96}{3125}$,

所以比赛结束时恰好打了 6 局的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{486}{3125} + \frac{96}{3125} = \frac{582}{3125}$.

(2) X 的所有可能取值为 2, 3, 4, 5, $P(X = 2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$,

$P(X = 3) = C_2^1 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$,

$P(X = 4) = C_3^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^4 = \frac{124}{625}$,

$P(X = 5) = C_4^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} + C_4^3 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{96}{625}$.

所以 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{124}{625}$	$\frac{96}{625}$

故数学期望 $E(X) = 2 \times \frac{9}{25} + 3 \times \frac{36}{125} + 4 \times \frac{124}{625} + 5 \times \frac{96}{625} = \frac{1966}{625}$.

【点睛】

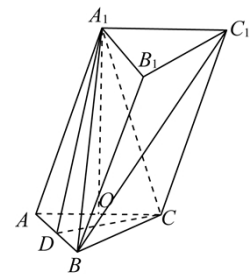
(1)本题的关键是比赛结束时恰好打了6局分两种情况：甲胜，乙胜；

(2)分析得到 X 的所有可能取值为2, 3, 4, 5, 求出相应的概率.

20. (12分)已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为正三角形， A_1 在底面 ABC 上的射影 O 恰好为棱 AC 的中点，且 $A_1O=3$ ，直线 A_1B 与平面 A_1C_1CA 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.

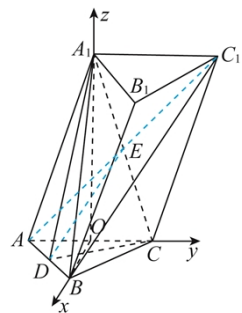
(1)在棱 AB 上是否存在一点 D ，使得 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ？

(2)若 D 为棱 AB 的中点，求平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角的余弦值.



【考点】空间直线与平面平行的判定以及平面与平面的夹角的余弦值

【详解】(1)在棱 AB 上存在点 D ，且 D 为棱 AB 的中点时，使得 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ，理由如下：



如图，连接 AC_1 交 A_1C 于点 E ，连接 DE ，则 DE 为 $\triangle ABC_1$ 的中位线，所以 $DE \parallel BC_1$.

又因为 $DE \subset$ 平面 A_1CD ， $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ，

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

即 D 为棱 AB 的中点时， $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

(2)依题意， $A_1O \perp$ 平面 ABC ， $A_1O \subset$ 平面 A_1C_1CA ，所以平面 $A_1C_1CA \perp$ 平面 ABC ，连接 BO ，又 $\triangle ABC$ 是正三角形，所以 $BO \perp AC$ ，又平面 $A_1C_1CA \cap$ 平面 $ABC = AC$ ，所以 $BO \perp$ 平面 A_1C_1CA . 在 $Rt\triangle A_1BO$ 中， $\angle BA_1O$ 即为直线 A_1B 与平面 A_1C_1CA 所成的角，即 $\angle BA_1O = \frac{\pi}{6}$ ，

又 $A_1O=3$ ，所以 $BO=\sqrt{3}$ ，则 $AB=2$.

以 O 为坐标原点， OB ， OC ， OA_1 所在直线分别为 x ， y ， z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

则 $A_1(0, 0, 3)$ ， $C_1(0, 2, 3)$ ， $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ ， $\vec{A_1C_1}=(0, 2, 0)$ ，

$\vec{A_1B}=(\sqrt{3}, 0, -3)$ ， $\vec{A_1C}=(0, 1, -3)$ ， $\vec{A_1D}=(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -3)$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $u=(x_1, y_1, z_1)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{A_1C_1} \cdot u = 2y_1 = 0, \\ \vec{A_1B} \cdot u = \sqrt{3}x_1 - 3z_1 = 0, \end{cases}$ 不妨取 $x_1=\sqrt{3}$ ，则 $y_1=0$ ， $z_1=1$ ，

$u=(\sqrt{3}, 0, 1)$.

设平面 A_1CD 的法向量为 $v=(x_2, y_2, z_2)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{A_1C} \cdot v = y_2 - 3z_2 = 0, \\ \vec{A_1D} \cdot v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 - 3z_2 = 0, \end{cases}$

不妨取 $z_2=1$ ，则 $y_2=3$ ， $x_2=3\sqrt{3}$ ， $v=(3\sqrt{3}, 3, 1)$.

设平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角为 θ ，则 $\cos \theta = |\cos \langle u, v \rangle| = \frac{|u \cdot v|}{|u||v|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{37}} = \frac{5\sqrt{37}}{37}$ ，

所以平面 A_1C_1B 与平面 A_1CD 的夹角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{37}}{37}$.

21. (12分)已知 O 为坐标原点，椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为6，且经过点 $(-\sqrt{6}, 2)$ ，

椭圆的左顶点到抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线的距离为2，且抛物线的准线和椭圆相交.

(1)求椭圆 C 和抛物线 Γ 的方程.

(2)斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点，与抛物线 Γ 交于 A, B 两点，当 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4$ 时，在 x 轴上是否存在定点 T ，使得 $\angle MTN$ 的平分线恰好为 x 轴？若存在，求出定点 T 的坐标；若不存在，请说明理由.

【分析】

(2)设直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2) \rightarrow$ 直线的方程和抛物线的方程联立 $\rightarrow x_1 + x_2$ ， $x_1x_2 \rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4 \rightarrow m = -2k \rightarrow l: y = k(x - 2) \rightarrow$ 设 $M(x_3, y_3)$ ， $N(x_4, y_4)$ ，直线方程与椭圆

方程联立 $\rightarrow x_3 + x_4$ ， x_3x_4 直线 TM 的斜率与直线 TN 的斜率之和为0 $\rightarrow T(\frac{9}{2}, 0)$

【考点】椭圆、抛物线的方程以及直线与椭圆、抛物线的位置关系

【详解】(1)由已知得 $\begin{cases} 2b=6, \\ \frac{2^2}{a^2}+\frac{(-\sqrt{6})^2}{b^2}=1, \end{cases}$

$$\therefore a^2=12, \quad b^2=9,$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$.

$\therefore$ 椭圆 C 的左顶点为 $(-3, 0)$.

$$\therefore \left(-\frac{p}{2}\right)-(-3)=2, \quad \text{解得 } p=2,$$

$\therefore$ 抛物线 Γ 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0.

设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$.

$$\therefore \Delta_1=(2km-4)^2-4k^2m^2=-16km+16>0, \quad \therefore km<1,$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{4-2km}{k^2}, \quad x_1x_2=\frac{m^2}{k^2},$$

$$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{km(4-2km)}{k^2}+2m^2=\frac{4m}{k}.$$

$$\text{则 } \vec{OA} \cdot \vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2}{k^2}+\frac{4m}{k}=-4,$$

$$\therefore \left(\frac{m}{k}+2\right)^2=0, \quad \therefore \frac{m}{k}=-2,$$

$$\therefore m=-2k, \quad \text{此时 } km=-2k^2<0.$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$.

假设在 x 轴上存在点 $T(x_0, 0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MTN$, 则直线 TM 的斜率与直线 TN 的斜率之和为 0.

(将“几何特征”转化为两直线斜率之间的“数量关系”)

设 $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$,

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(3k^2+4)x^2-12k^2x+12k^2-36=0$,

$$\therefore \Delta_2=(12k^2)^2-4(3k^2+4)(12k^2-36)=60k^2+144>0 \quad \text{恒成立},$$

$$\therefore x_3+x_4=\frac{12k^2}{3k^2+4}, \quad x_3x_4=\frac{12k^2-36}{3k^2+4}.$$

$$\therefore k_{TM}+k_{TN}=\frac{y_3}{x_3-x_0}+\frac{y_4}{x_4-x_0}=0,$$

$$\therefore k(x_3-2)(x_4-x_0)+k(x_4-2)(x_3-x_0)=0,$$

$$\therefore 2x_3x_4-(x_0+2)(x_3+x_4)+4x_0=0,$$

$$\therefore \frac{24k^2-72}{3k^2+4}-(x_0+2)\times\frac{12k^2}{3k^2+4}+4x_0=0,$$

(得到关于 x_0 的方程, 进而得出 x_0 的值)

$$\text{解得 } x_0=\frac{9}{2}.$$

$\therefore$ 在 x 轴上存在定点 $T\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, 使得 x 轴平分 $\angle MTN$.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$, $g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1)求证: 函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 具有相同的最大值, 并分别指出取得最大值时 x 的值;

(2)若方程 $f(x)=a$ 和 $g(x)=a$ 共有三个不同的解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1<x_2<x_3$, 求证: x_1, x_2, x_3 成等比数列.

【分析】

(2)由(1)可知 $f(x)$, $g(x)$ 的单调性、最值 $\rightarrow$ 在 $(1, e)$ 内, 存在唯一 x_0 , 使得 $f(x_0)=g(x_0)=a \rightarrow x_0 = x_2 \rightarrow 0 < x_1 < 1 < x_2 < e < x_3 \rightarrow \frac{x_1}{ex_1} = \frac{x_2}{ex_2} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_3}{x_3} \rightarrow f(x_1)=f(\ln x_2) \rightarrow x_1 = \ln x_2 \rightarrow g(ex_2)=g(x_3) \rightarrow ex_2 = x_3 \rightarrow x_2^2 = ex_2 \ln x_2 = x_3 x_1 \rightarrow$ 得证

【考点】函数的最值以及导数的综合应用

【详解】

(1)由题意, $f(x)=\frac{1-x}{e^x}(x \in \mathbf{R})$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=\frac{1}{e}$.

$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$, $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x)>0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x)<0$, 函数 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

则函数 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得最大值 $g(e)=\frac{1}{e}$.

因为 $f(1)=g(e)=\frac{1}{e}$ ，所以函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 具有相同的最大值，且取得最大值时 x 的值分别为 $1, e$.

(2)由(1)知， $f(0)=0, f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{e}$ ，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$ ， $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

$g(1)=0, f(e)=e^{1-e}, 0<e^{1-e}<\frac{1}{e}=e^{-1}$.

若方程 $f(x)=a$ 和 $g(x)=a$ 共有三个不同的解 x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1<x_2<x_3$ ，

则在 $(1, e)$ 内，存在唯一 x_0 ，使得 $f(x_0)=g(x_0)=a$ ，

所以 $x_0=x_2$ ，又 $0<x_1<1<x_2<e<x_3$ ，

则 $\frac{x_1}{ex_1}=\frac{x_2}{ex_2}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}$ ，

所以 $f(x_1)=f(\ln x_2)$ ，又因为 $0<x_1<1<x_2<e<x_3$ ，所以 $x_1=\ln x_2$ ，同理 $g(ex_2)=g(x_3)$ ， $ex_2\in(e, e^e)$ ， $x_3\in(e, +\infty)$ ，而 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，所以 $ex_2=x_3$.

又因为 $f(x_2)=g(x_2)$ ，即 $\frac{x_2}{ex_2}=\frac{\ln x_2}{x_2}$ ，所以 $x_2^2=ex_2\ln x_2=x_3x_1$ ，所以 x_1, x_2, x_3 成等比数列.