2023 年普通高招全国统一考试临考预测押题密卷

数学 A 卷评分标准

评分说明

1. 本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照进行评分.

2. 对解答题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后续部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后续部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数.

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	B	D	C	D	B

注：具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P30—P34.

评分标准

第 1—8 题，凡与答案不符的均不给分.

二、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

9	10	11	12
BC	BD	ACD	ABD

注：具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P34—P37.

评分标准

第 9—12 题，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $(\frac{1}{2}, -1)$ （5 分） 填写 $(0.5, -1)$ 同样给分.

14. $\frac{1}{8}$ （5 分） 填写 0.125 或 12.5% 同样给分.

15. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ （5 分）

16. $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-1]$ （5 分）

评分标准

第 15，16 题，凡与答案不符的均不给分.

注：具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P37—P39.

四、解答题(共70分)

评分标准

17.(本题共10分)

(1) 因为 $b=\sqrt{3}$, $a\sin B+3\cos A=\sqrt{3}c$,

所以 $a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=\sqrt{3}c$, (1分)

由正弦定理,得 $\sin A\sin B+\sqrt{3}\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin C$, (2分)

又 $A+B+C=\pi$,故 $\sin A\sin B+\sqrt{3}\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin(A+B)=$

$\sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin B\cos A$,

整理,得 $\sin A(\sqrt{3}\cos B-\sin B)=0$.

因为 $0<A<\pi$, $\sin A\neq0$,

所以 $\sqrt{3}\cos B-\sin B=0$. (4分) 正确运用两角和公式给1分,得到角 B 的正弦和余弦的关系再给1分.

因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B\neq0$,所以 $\cos B\neq0$,

所以 $\tan B=\sqrt{3}$,

故 $B=\frac{\pi}{3}$. (5分)

(2) 因为 $b=\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$,所以 $a+c=3$. (6分)

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即 $a^2+c^2-ac=3$. (7分)

又 $(a+c)^2=9$,即 $a^2+2ac+c^2=9$,

所以 $3ac=6$,即 $ac=2$, (8分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (10分) 正确写出三角形的面积公式给1分,结果计算正确再给1分.

18.(本题共12分)

(1) 由 $2S_n=3a_n+n^2-4n$,得

$2S_1=3a_1+1-4$,即 $2a_1=3a_1+1-4$,解得 $a_1=3$. (1分)

由 $2S_n=3a_n+n^2-4n$,得 $2S_{n+1}=3a_{n+1}+(n+1)^2-4(n+1)$,

两式作差,得 $2a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2n-3$,

即 $a_{n+1}=3a_n-2n+3$, (3分)

由 $b_n=a_n-n+1$,得 $b_{n+1}=a_{n+1}-(n+1)+1=3a_n-2n+3-$

$n-1+1=3(a_n-n+1)=3b_n$

又 $b_1=a_1-1+1=3$，故 $b_n=3^n$， (5 分)

求出 b_1 给 1 分，得到 $\{b_n\}$ 的通项公式再给 1 分.

所以 $a_n=3^n+n-1$. (6 分)

(2) 由 $a_n=3^n+n-1$，得

$S_n=\frac{3}{2}\cdot(3^n+n-1)+\frac{n^2-4n}{2}=\frac{3}{2}(3^n-1)+\frac{n^2-n}{2}$， (7 分)

由 $S_n\leqslant\lambda b_n$，得 $\frac{3}{2}(3^n-1)+\frac{n^2-n}{2}\leqslant\lambda\cdot 3^n$，

即 $\frac{n^2-n-3}{2\cdot 3^n}\leqslant\lambda-\frac{3}{2}$. (8 分)

能正确参变分离即可给 1 分.

令 $c_n=\frac{n^2-n-3}{2\cdot 3^n}$，则 $c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)^2-(n+1)-3}{2\cdot 3^{n+1}}-\frac{n^2-n-3}{2\cdot 3^n}=\frac{-2n^2+4n+6}{2\cdot 3^{n+1}}$， (9 分)

若 $c_{n+1}-c_n>0$，则 $-2n^2+4n+6>0$，即 $2(n-3)(n+1)<0$，解得 $-1<n<3$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，

故 $c_1<c_2<c_3=c_4>c_5>c_6>\cdots>c_n$， (10 分)

故数列 $\{c_n\}$ 的最大值为 $c_3=\frac{3^2-3-3}{2\times 3^3}=\frac{1}{18}$， (11 分)

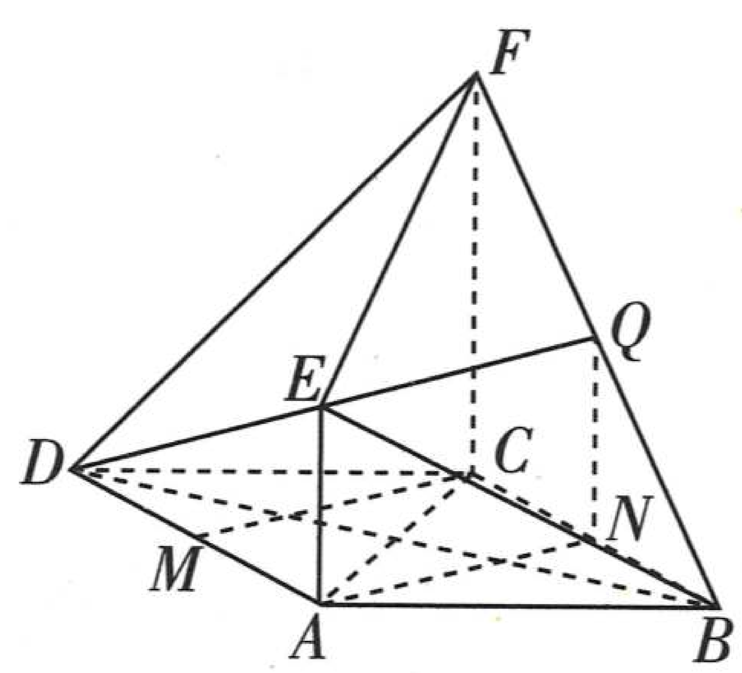
代入 c_4 求出数列 $\{c_n\}$ 的最大值，同样给分.

则 $\frac{1}{18}\leqslant\lambda-\frac{3}{2}$，

故 $\lambda\geqslant\frac{14}{9}$. (12 分)

19. (本题共 12 分)

(1) 如图，取 BC 的中点 N，连接 AN.



因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD // BC, AD=BC$，

因为点 M 是 AD 的中点，所以 $AM=CN, AM // CN$，

所以四边形 $ANCM$ 是平行四边形，所以 $CM // AN$. (2 分)

采用其他方法证得 $CM // AN$，也给 2 分.

取 BF 的中点 Q,连接 NQ,EQ,所以 $CF /\!/ QN, CF=2NQ$,

又 $AE /\!/ CF, CF=2AE$,所以 $AE /\!/ QN, AE=NQ$,

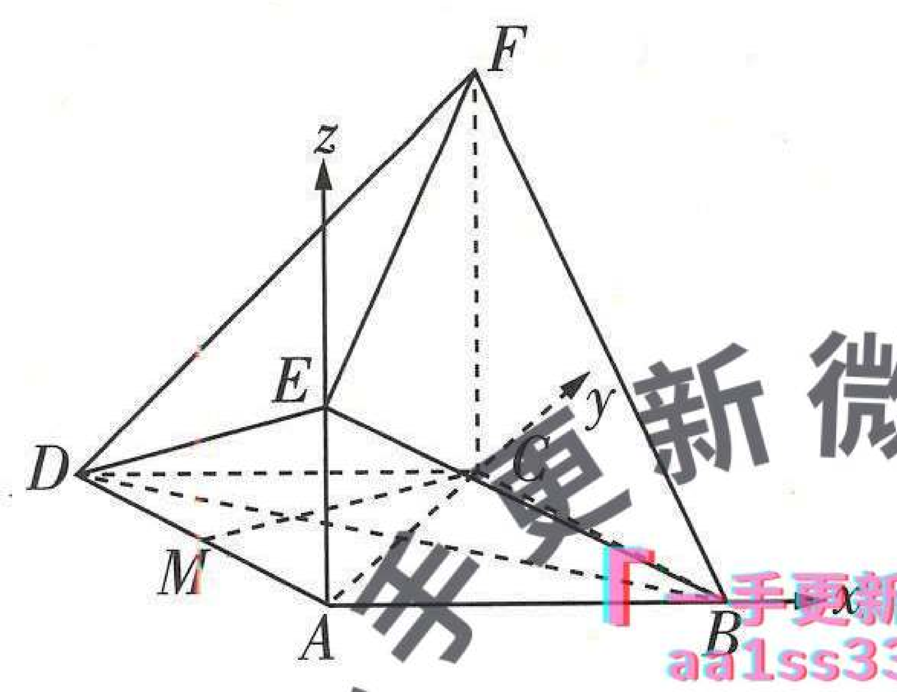
所以四边形 $ANQE$ 是平行四边形,所以 $AN /\!/ EQ$,又 $AN /\!/ CM$,

所以 $CM /\!/ EQ$. (4 分)

又 $EQ \subset$ 平面 EFB, $CM \not\subset$ 平面 EFB,所以 $CM /\!/$ 平面 EFB. (5 分)

(2) 以 A 为坐标原点,AB,AC,AE 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(2,0,0), D(-2,2,0), E(0,0,1), F(0,2,2)$,

所以 $\overrightarrow{DF}=(2,0,2), \overrightarrow{BF}=(-2,2,2), \overrightarrow{BE}=(-2,0,1)$, (6 分)

注意:若考生将空间直角坐标系建成左手系,在部分地区的高考阅卷中会扣 1 分,所以请考生在考试中将空间直角坐标系建成右手系.

设平面 DBF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0 \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} 2x_1+2z_1=0 \\ -2x_1+2y_1+2z_1=0 \end{cases}$,

令 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,2,-1)$. (8 分)

求平面的法向量时,没有列方程组,扣 1 分.

设平面 EBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} -2x_2+z_2=0 \\ -2x_2+2y_2+2z_2=0 \end{cases}$,

令 $x_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$, (10 分)

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$, (11 分)

正确写出两向量的夹角公式即给 1 分.

由于二面角 $E-BF-D$ 是锐二面角,所以二面角 $E-BF-D$ 的余弦值为$\dfrac{1}{2}$. (12 分)

20.(本题共12分)

(1) 由频率分布直方图可知,当甲骑共享电单车的时间位于区间$[15,20]$时,其花费为3元,对应的频数为$0.06\times5\times100=30$; (1分)

当甲骑共享电单车的时间位于区间$(20,25]$时,其花费为5元,对应的频数为$0.08\times5\times100=40$. (2分)

故甲上下班骑共享电单车时,其花费高于起步价的概率为$\frac{40}{30+40}=\frac{4}{7}$. (4分)

列式正确给1分,结果计算正确再给1分.

(2) 由题知,甲上下班时单次骑行的费用为2元、3元或5元,其对应的频率分别为$0.02\times5=0.1=\frac{1}{10}$,$0.06\times5+0.04\times5=0.5=\frac{1}{2}$,$0.08\times5=0.4=\frac{2}{5}$. (6分)

X的所有可能取值为4,5,6,7,8,10. (7分)

$P(X=4)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$,$P(X=5)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$,

$P(X=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=7)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$,$P(X=8)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$,

$P(X=10)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$. (10分)

若概率计算有误,以求解正确的个数记分,对1—2个给1分,对3—4个给2分,对5个给3分且此问后续不再给分.

故X的分布列为

X	4	5	6	7	8	10
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$

(11分)

故$E(X)=4\times\frac{1}{100}+5\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{2}{25}+8\times\frac{2}{5}+10\times\frac{4}{25}=\frac{37}{5}=7.4$. (12分)

21.（本题共 12 分）

(1) 由题知 $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1\\ 4\sqrt{a^2+b^2}=8\sqrt{3}\end{cases}$， （1 分）

又 $a>b>0$，

解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=2\end{cases}$， （3 分） ←→ 直接求出 a^2 和 b^2 的值，同样给分.

所以 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. （4 分）

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$， （5 分）

故 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)>0$，即 $8k^2-m^2+4>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}$，

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$. （6 分） ←→ 能正确应用根与系数的关系，即可给 1 分.

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=-1$，

所以 $\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}+\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=-1$，

故 $3m^2-6k^2-7=0$，即 $m^2=\dfrac{6k^2+7}{3}$，

此时 $\Delta>0$ 恒成立. （7 分）

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，

$\triangle PAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|PA||PB|\leqslant\dfrac{1}{4}(|PA|^2+|PB|^2)=\dfrac{|AB|^2}{4}$，

当且仅当 $|PA|=|PB|$ 时等号成立. （8 分） ←→ 若不写等号成立的条件，扣 1 分.

因为$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{4km}{1+2k^2})^2-\frac{4(2m^2-8)}{1+2k^2}}=$

$\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}\sqrt{8k^2-m^2+4}$,

将$m^2=\frac{6k^2+7}{3}$代入上式,得$|AB|^2=\frac{8(1+k^2)}{(1+2k^2)^2}\times(8k^2-\frac{6k^2+7}{3}+$

$4)=\frac{8(1+k^2)(5+18k^2)}{3(1+2k^2)^2}$, (9 分)

令$1+2k^2=t$,则$t\geqslant1$,

故$|AB|^2=\frac{4(t+1)(9t-4)}{3t^2}=\frac{4(9t^2+5t-4)}{3t^2}=-\frac{16}{3}(\frac{1}{t^2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{t}-$

$\frac{9}{4})=-\frac{16}{3}(\frac{1}{t}-\frac{5}{8})^2+\frac{169}{12}\leqslant\frac{169}{12}$,

当且仅当$\frac{1}{t}=\frac{5}{8}$,即$k^2=\frac{3}{10}$时等号成立.

故$\triangle PAB$的面积$S\leqslant\frac{|AB|^2}{4}\leqslant\frac{169}{48}$. (10 分)

当直线AB的斜率不存在时,设其方程为$x=n$,则$\frac{n^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,故

$y^2=\frac{8-n^2}{2}$,

此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=n^2-\frac{8-n^2}{2}=-1$,故$n^2=2$,

故$|AB|=2\sqrt{\frac{8-n^2}{2}}=2\sqrt{3}$,$\triangle PAB$的面积$S\leqslant\frac{|AB|^2}{4}=3$,

(11 分)

易得$\frac{169}{48}>3$.

综上所述,$\triangle PAB$面积的最大值是$\frac{169}{48}$. (12 分)

22.(本题共 12 分)

(1) 由题知,函数$f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$,$f'(x)=1+ae^{-x}$, (1 分)

只要正确求出$f(x)$的导数,无论是否整理或整理出错,均给 1 分.

①当$a\geqslant0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. (2 分)

②当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln(-a)$,

当 $x\in(-\infty,\ln(-a))$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减; (3 分)

当 $x\in(\ln(-a),+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增. (4 分)

(2) 因为 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点,故 $a<0$.

令 $f(x)=0$,则 $(x-1)e^x=a$.

设 $g(x)=(x-1)e^x$,则 $g'(x)=xe^x$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, (5 分)

又 $g(x_1)=g(x_2)=a,g(0)=-1,g(1)=0$,当 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to 0$,当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$,

所以 $-1<a<0,x_1<0<x_2<1$. (6 分)

先证明 $x_1+x_2<0$,

即证 $x_1<-x_2$,

只需证 $g(x_2)=g(x_1)>g(-x_2)$.

设 $h(x)=g(x)-g(-x)=(x-1)e^x-(-x-1)e^{-x}$, (7 分)

则 $h'(x)=x(e^x-e^{-x})$,当 $x>0$ 时,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, (8 分)

所以 $h(x_2)>h(0)=0$,故 $g(x_2)=g(x_1)>g(-x_2)$,

即 $x_1+x_2<0$. (9 分)

注意推理过程的严谨性,构造函数、判断新函数单调性、得出结论各占 1 分.

再证明 $x_2<1+\frac{a}{e}$.

由于 $a=g(x_2)=(x_2-1)e^{x_2}$,故只需证 $x_2<1+\frac{(x_2-1)e^{x_2}}{e}$,

即证 $(x_2-1)e^{x_2}-e(x_2-1)=(x_2-1)(e^{x_2}-e)>0$. (10 分)

由 $0<x_2<1$,得 $x_2-1<0,e^{x_2}-e<0$,

所以 $(x_2-1)(e^{x_2}-e)>0$,故 $x_2<1+\frac{a}{e}$. (11 分)

故 $x_1+2x_2=(x_1+x_2)+x_2<0+1+\frac{a}{e}=1+\frac{a}{e}$.

即 $x_1+2x_2<1+\frac{a}{e}$. (12 分)

2023 年普通高招全国统一考试临考预测押题密卷

数学 B 卷评分标准

评分说明

1. 本解答给出了一种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照进行评分.

2. 对解答题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后续部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后续部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后续部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

3. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数.

一、选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	B	A	B	D	C

注:具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P48—P52.

评分标准

第 1—8 题,凡与答案不符的均不给分.

二、选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9	10	11	12
BC	ABD	AC	ACD

注:具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P52—P55.

评分标准

第 9—12 题,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 96π (5 分)

14. $\frac{5}{6}$ (5 分)

15. $\frac{1}{3}$ (5 分)

16. $(\frac{4}{e^2}, +\infty)$ (5 分)

注:具体解析见《命题人 360°详解全析手册》P55—P57.

评分标准

第 13,15,16 题,凡与答案不符的均不给分.

答案不唯一,填写任意满足 $\omega = k - \frac{1}{6}(k \in \mathbf{N}^*)$ 的值均可.

四、解答题(共70分)

评分标准

17.(本题共10分)

(1) 将$\left|\sqrt{a_{n+1}}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{a_n}+\frac{1}{2}$两边同时平方，得

$a_{n+1}-\sqrt{a_{n+1}}+\frac{1}{4}=a_n+\sqrt{a_n}+\frac{1}{4}$,

所以 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$, (1分)

所以$(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$,

又$\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\neq 0$,

则$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$, (2分)

又$\sqrt{a_1}=1$,

所以数列$\{\sqrt{a_n}\}$是以1为首项，1为公差的等差数列， (3分)

所以$\sqrt{a_n}=1+n-1=n$, (4分)

所以 $a_n=n^2$. (5分)

(2) 由(1)知 $b_n=\frac{a_n+n}{n\cdot 2^n}=\frac{n+1}{2^n}$, (6分)

所以 $T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$,① (7分)

所以 $2T_n=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}+\frac{n+1}{2^{n-1}}$,② (8分)

②−①可得，$T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}$

$=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^n}$

$=3-\frac{n+3}{2^n}$. (10分)

· 结果计算错误，但有体现错位相减法，可给1分.

· 结果写成其他等价形式，同样给分.

18.(本题共12分)

(1) 选①,

因为$2(b\cos C-a)=c$，所以$a+\frac{c}{2}=b\cos C$.

由正弦定理得$\sin A+\frac{\sin C}{2}=\sin\angle ABC\cos C$. (2分)

只要能够正确运用正弦定理，整理成其他形式，同样给分.

即$\sin(\angle ABC+C)+\frac{\sin C}{2}=\sin\angle ABC\cos C$,

故$\frac{\sin C}{2}+\sin C\cos\angle ABC=0$, (3分)

因为$\angle ABC\in(0,\pi)$，$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C\neq0$，

所以$\cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$，所以$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$.（4分）

选②，

由$2a+c=\sqrt{3}b\sin A+b\cos A$及正弦定理，得

$2\sin A+\sin C=\sqrt{3}\sin\angle ABC\sin A+\sin\angle ABC\cos A$，（1分）

即$2\sin A+\sin(A+\angle ABC)=\sqrt{3}\sin\angle ABC\sin A+\sin\angle ABC\cos A$，

$2\sin A+\sin A\cos\angle ABC+\cos A\sin\angle ABC=\sqrt{3}\sin\angle ABC\sin A+\sin\angle ABC\cos A$，

所以$2\sin A=\sqrt{3}\sin\angle ABC\sin A-\sin A\cos\angle ABC$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A\neq0$，

所以$2=\sqrt{3}\sin\angle ABC-\cos\angle ABC=2\sin(\angle ABC-\frac{\pi}{6})$，

即$\sin(\angle ABC-\frac{\pi}{6})=1$.（3分）正确运用两角和的正弦公式给1分，最终化简结果正确再给1分.

又$\angle ABC\in(0,\pi)$，所以$\angle ABC-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$.（4分）

选③，

由$a+c\cos\angle ABC=b\cos C-c$及正弦定理，得

$\sin A+\sin C\cos\angle ABC=\sin\angle ABC\cos C-\sin C$，（1分）

$\sin(\angle ABC+C)+\sin C\cos\angle ABC=\sin\angle ABC\cos C+\cos\angle ABC\sin C+\sin C\cos\angle ABC=\sin\angle ABC\cos C-\sin C$，

即$2\cos\angle ABC\sin C=-\sin C$.

因为$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C\neq0$，

所以$\cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$.（3分）正确运用两角和的正弦公式给1分，最终化简结果正确再给1分.

又$\angle ABC\in(0,\pi)$，所以$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$.（4分）

(2) 因为BD平分$\angle ABC$，所以$\angle ABD=\angle CBD$，

在$\triangle ABD$中，$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即$\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB}$，

在$\triangle BCD$中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，即$\frac{CD}{BC}=\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}$，

因为$\angle ADB+\angle BDC=\pi$，

所以$\sin\angle ADB=\sin\angle BDC$.

所以$\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BC}$，所以$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=2$，故$\frac{BD}{AB+BC}=\frac{BD}{3BC}$.（6分）方法不同，但结果正确同样给2分.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC, S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD$,

$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$, (7 分)

所以 $\frac{BD\cdot\sin\angle ABD}{BC\cdot\sin\angle ABC}=\frac{2}{3}$. (8 分)

又 $\angle ABD=\frac{\angle ABC}{2}$,

所以 $\frac{BD}{BC}=\frac{2\sin\angle ABC}{3\sin\frac{\angle ABC}{2}}=\frac{4\sin\frac{\angle ABC}{2}\cos\frac{\angle ABC}{2}}{3\sin\frac{\angle ABC}{2}}=\frac{4}{3}\cos\frac{\angle ABC}{2}$.

(10 分) 正确运用二倍角公式给 1 分，化简正确再给 1 分.

又 $\angle ABC\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\angle ABC}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$,

所以 $\cos\frac{\angle ABC}{2}\in(0,1)$,

所以 $\frac{BD}{BC}\in(0,\frac{4}{3})$, $\frac{BD}{3BC}\in(0,\frac{4}{9})$,

即 $\frac{BD}{AB+BC}$ 的取值范围为 $(0,\frac{4}{9})$. (12 分)

19.(本题共 12 分)

(1) 由表格数据，得 $\bar{x}=\frac{1}{7}\times(1+2+3+4+5+6+7)=4$,

$\bar{y}=\frac{1}{7}\times(21+25+28+34+36+39+41)=32$, (1 分)

则 $\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2=28$,

$\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2=(-11)^2+(-7)^2+(-4)^2+2^2+4^2+7^2+9^2=336$,

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-11)+(-2)\times(-7)+(-1)\times(-4)+0\times2+1\times4+2\times7+3\times9=96$, (3 分)

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{96}{\sqrt{28\times336}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}>0.75$. (5 分) 只要列式正确，即可给 1 分；计算结果正确，再给 1 分.

所以 y 与 x 的线性相关性较强. (6 分)

(2) 由(1)得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{96}{28}\approx3.43$,

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=32-3.43\times4=18.28$,

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=3.43x+18.28$. (8 分) 正确得出 $\hat{b}$ 的值，给 1 分；正确得出回归方程，再给 1 分.

设销售 m 把时，该产品可盈利，则

$800m-500m-840\times10\ 000>0$，解得 $m>28\ 000$. (9 分)

前7个月的销量之和为$100\times(21+25+28+34+36+39+41)=22\ 400<28\ 000$,

将$x=8$代入回归方程得$\hat{y}=3.43\times8+18.28=45.72$,

$22\ 400+4\ 572=26\ 972<28\ 000$,

将$x=9$代入回归方程得$\hat{y}=3.43\times9+18.28=49.15$,

$26\ 972+4\ 915=31\ 887>28\ 000$, (11分)

所以预测该产品上市第9个月开始盈利. (12分)

20.(本题共12分)

(1) 如图,取AB的中点D,连接A_1D,CD,

因为$CA=CB$,D为AB的中点,所以$CD\perp AB$.

由正棱柱的性质知平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC, (1分)

又平面$ABB_1A_1\cap$平面$ABC=AB$,$CD\subset$平面ABC,

所以$CD\perp$平面ABB_1A_1. (2分)

因为$AB_1\subset$平面ABB_1A_1,所以$CD\perp AB_1$.

由题可知$AD=BB_1$,$AB=AA_1$,$\angle A_1AD=\angle ABB_1=90°$,

所以$\triangle A_1AD\cong\triangle ABB_1$,所以$\angle A_1DA=\angle AB_1B$. (3分)

因为$\angle B_1AB+\angle AB_1B=90°$,

所以$\angle B_1AB+\angle A_1DA=90°$,所以$AB_1\perp A_1D$.

又$A_1D\cap CD=D$,$A_1D\subset$平面A_1DC,$CD\subset$平面A_1DC,

所以$AB_1\perp$平面A_1DC.

又$A_1C\subset$平面A_1DC,所以$AB_1\perp A_1C$. (5分)

在推导$AB_1\perp$平面A_1DC的过程中,未说明$A_1D\cap CD=D$扣1分.

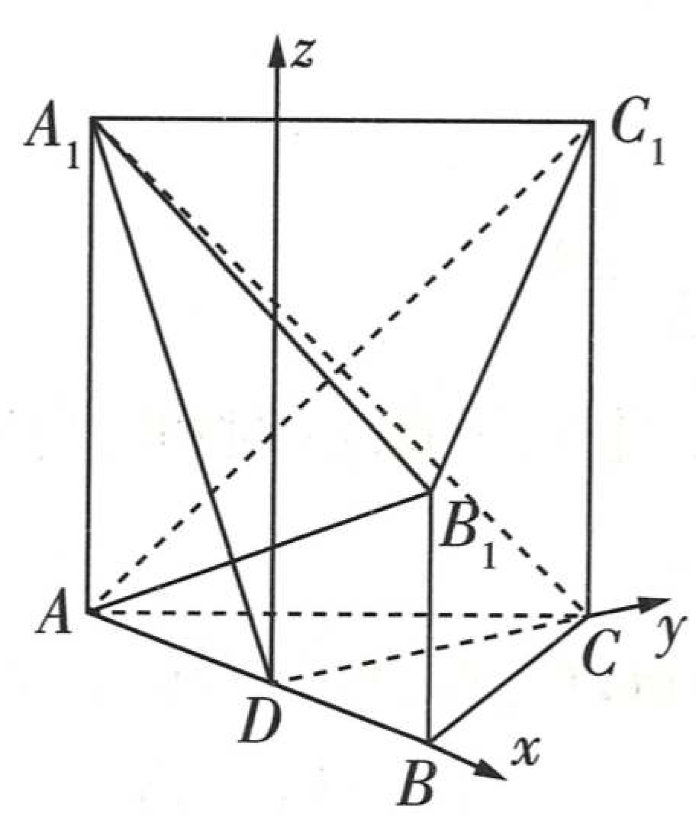
(2) 由(1)知$CD\perp$平面ABB_1A_1,以D为坐标原点,DB,DC所在直线分别为x轴、y轴,以过点D且垂直于平面ABC的直线为z轴建立空间直角坐标系,如图所示. (6分)

设$BB_1=t(0<t<2)$,则$A(-1,0,0)$,$A_1(-1,0,2)$,$B_1(1,0,t)$,$C_1(0,\sqrt{3},2)$,所以$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,t)$,$\overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},2)$. (7分)

设平面AB_1C_1的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}2x+tz=0\\x+\sqrt{3}y+2z=0\end{cases}$,令$z=2$,

得$\boldsymbol{n}=\left(-t,\dfrac{t-4}{\sqrt{3}},2\right)$.



易得平面ABC的一个法向量$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. (8分)

设平面AB_1C_1与平面ABC的夹角为θ,则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{t^2+\left(\frac{t-4}{\sqrt{3}}\right)^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-2t+7}}=\frac{2\sqrt{3}}{5},$$

解得$t=\dfrac{1}{2}$或$t=\dfrac{3}{2}$. (9分)

写出公式$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$即可给1分.

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{n}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2\sqrt{3}},2\right)$，$B_1\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(2,0,-\frac{3}{2}\right)$，

直线 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值为

$$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1B_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{5}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{25}.$$ （10 分）

当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{n}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2\sqrt{3}},2\right)$，$B_1\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$，

直线 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1B_1}\rangle|=$

$$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{8\sqrt{51}}{85}.$$ （11 分）

综上，直线 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{3}}{25}$ 或 $\frac{8\sqrt{51}}{85}$.

（12 分）→没有总结性语句，扣 1 分.

21.（本题共 12 分）

(1) 由题意知 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\sqrt{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$， （2 分）

又 $a>0,b>0$，

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$， （3 分）

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$. （4 分）

(2) 由题可知，点 M,N 在 y 轴上，且关于原点对称，直线 PQ 的斜率存在，

设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立直线 PQ 与双曲线 C 的方程得 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

整理得 $(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

则 $1-k^2\neq0$，$\Delta=4m^2+12-12k^2>0$，

故 $k^2<1+\frac{m^2}{3}$ 且 $k^2\neq1$，$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$. （5 分）→没有设出点 P,Q 的坐标而直接利用根与系数的关系解题，扣 1 分.

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1-2}(x-2)-1$，

令 $x=0$，则 $M(0,\frac{x_1+2y_1}{2-x_1})$.

同理，$N(0,\frac{x_2+2y_2}{2-x_2})$， (6 分)

由 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$，可得 $\frac{x_1+2y_1}{2-x_1}+\frac{x_2+2y_2}{2-x_2}=0$，

所以 $\frac{x_1+2(kx_1+m)}{2-x_1}+\frac{x_2+2(kx_2+m)}{2-x_2}=0$，

所以 $[(2k+1)x_1+2m](2-x_2)+[(2k+1)x_2+2m](2-x_1)=0$，

所以 $(4k+2-2m)(x_1+x_2)-(4k+2)x_1x_2+8m=0$，

所以 $(4k-2m+2)\cdot\frac{2km}{1-k^2}-(4k+2)\cdot\frac{-m^2-3}{1-k^2}+8m=0$， (7 分)

整理得 $m^2+(2k+4)m+6k+3=0$，

所以 $(m+3)(m+2k+1)=0$. (9 分)

当 $m+2k+1=0$ 时，$m=-2k-1$，此时直线 PQ 的方程为 $y=k(x-2)-1$，恒过定点 $A(2,-1)$，显然不可能，

所以 $m=-3$，即直线 PQ 的方程为 $y=kx-3$，恒过定点 $E(0,-3)$. (10 分) ←→ 没有说明直线 PQ 不可能恒过定点 $(2,-1)$，扣 1 分.

设点 O 到直线 PQ 的距离为 d，

则 $d\leqslant|OE|=3$， (11 分)

当且仅当 $k=0$ 时，取“=”.

故点 O 到直线 PQ 距离的最大值为 3. (12 分)

22.(本题共 12 分)

(1) $f'(x)=e^x\sin(1-x)-e^x\cos(1-x)=e^x[\sin(1-x)-\cos(1-x)]$， (1 分) ←→ 正确求出函数 $f(x)$ 的导数，无论是否整理或整理出错，均给 1 分.

所以 $f'(1)=e(\sin 0-\cos 0)=-e$， (2 分)

又 $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-e(x-1)$，

即 $ex+y-e=0$. (3 分)

(2) 要证 $2f(x)-f'(x)<\frac{e^{3-x}}{2}$，

即证 $2e^x\sin(1-x)-e^x[\sin(1-x)-\cos(1-x)]=e^x[\sin(1-x)+\cos(1-x)]<\frac{e^{3-x}}{2}$，

即证 $2e^x[\sin(1-x)+\cos(1-x)]<e^{3-x}$，

即 $e^{3-2x}-2\sqrt{2}\sin(1-x+\frac{\pi}{4})>0$. (5 分)

令 $t=1-x$，则 $t\in(-1,\frac{1}{2})$.

即证 $e^{1+2t}-2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})>0$.

令 $g(x)=e^x-(x+1)$，则 $g'(x)=e^x-1$，

显然当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(x)_{\min}=g(0)=0$，所以 $g(x)\geqslant 0$，

所以 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

故当 $t\in(-1,\frac{1}{2})$ 时，$e^{1+2t}\geqslant 2t+2$ 恒成立，

当且仅当 $t=-\frac{1}{2}$ 时取等号. （7分）

令 $h(x)=x+1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，$x\in(-1,\frac{1}{2})$，

则 $h'(x)=1-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$， （8分）

正确求出函数 $h(x)$ 的导数，无论是否整理或整理出错，均给1分.

当 $x\in(-1,0)$ 时，$-1+\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，

所以 $\cos(x+\frac{\pi}{4})>\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $1-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$，

即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$，

所以 $\cos(x+\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $1-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})>0$，

即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，

所以 $h(x)=x+1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\geqslant 0$ 恒成立，

当且仅当 $x=0$ 时取等号.

故当 $t\in(-1,\frac{1}{2})$ 时，$2t+2-2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})\geqslant 0$，

当且仅当 $t=0$ 时取等号， （10分）

所以 $e^{1+2t}\geqslant 2t+2\geqslant 2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$，

因为两个等号不能同时取到，

所以 $e^{1+2t}>2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$，

即 $e^{1+2t}-2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})>0$.

故当 $x\in(\frac{1}{2},2)$ 时，$2f(x)-f'(x)<\frac{e^{3-x}}{2}$. （12分）

没有说明两个不等式中等号取得的条件不同，扣1分.