数　学

新素材

1. A　由题意可得一更相当于现在的两个小时，
又每更分为五点，
故一点为 24 分钟.
因为“三更四点”相当于现在的凌晨 2 时 36 分，
所以一更为晚上 7 时-9 时，
二更为晚上 9 时-11 时.
则 9 时为一更，
又一点为 24 分钟，
故晚上 9 时 24 分为一更一点.

2. D　易知实验组不算腐蚀数据的中位数为 15，
所以实验组被腐蚀数据为 13，所以实验组原数据总值为 $6+8+10+\cdots+21+22+23=179$，
又腐蚀前对照组数据总值比实验组数据总值大 35，
所以对照组数据总值为 $179+35=214$，
故对照组被腐蚀的数据为 $214-(2+14\times3+17+20+22+23\times2+24+26)=15$.

3. B　从 3 个小组中选取 2 个小组有 $C_3^2=3$ 种情况，
则恰好有 2 个小组针对同一部分发表感想的不同情况有 $C_3^2C_5^1C_4^1=60$ 种.

4. C　因为从静止状态进行匀加速，
所以 $v_0=0$，
由 $x(t)=v_0t+\frac{1}{2}kt^2$ 知 $\frac{10}{7}=\frac{1}{2}\times60^2\times k$，
解得 $k=\frac{1}{1260}\ \mathrm{km/s^2}$，
故由 $v=x'(t)=v_0+kt$，
得 $\frac{600}{3600}=\frac{1}{1260}t$，
[易错]容易忽略 k 是根据时间单位秒(s)来计算的，而时速 600 公里是以小时来记，故需要进行时间单位间的转化.
解得 $t=210$ s.

5. 456；1.4879　由表格数据可得，200 名职工的献血量的平均值为 $\bar{x}=\frac{1}{200}[200\times(1\times46+2\times24+3\times18+4\times10)+400\times(1\times27+2\times16+3\times13+4\times9)]=456$ cc；
献血次数的平均值为 $\bar{y}=\frac{1}{200}[0\times37+1\times(46+27)+2\times(24+16)+3\times(18+13)+4\times(10+9)]=1.61$ 次，
则其方差为 $s^2=\frac{1}{200}[37\times(0-1.61)^2+(46+27)\times(1-1.61)^2+(24+16)\times(2-1.61)^2+(18+13)\times(3-1.61)^2+(10+9)\times(4-1.61)^2]=1.4879$.

6. 1　设 $f(x)=x^3+62x^2+696x-38448(x>0)$，
易知 $f'(x)=3x^2+124x+696>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，
所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
即 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，
因为 $f(0)<0,f(100)>0$，
即 $f(0)\cdot f(100)<0$，
[难点]函数零点不易直接求解时，可利用零点存在定理判断零点所在区间或零点的个数.
所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个零点，
即此方程的解的个数为 1.

7. 164　因为浏览量 X(万次)服从正态分布 $N(1.5,0.09)$，
所以浏览量 X(万次)的均值 $\mu=1.5$，
方差 $\sigma^2=0.09,\sigma=0.3$，
故 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=P(1.2<X\leqslant1.8)\approx0.6827$，
$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=P(0.9<X\leqslant2.1)\approx0.9545$，
故 $P(0.9<X\leqslant1.8)=P(1.2<X\leqslant1.8)+\frac{1}{2}[P(0.9<X\leqslant2.1)-P(1.2<X\leqslant1.8)]\approx0.8186$.
故浏览量在(0.9，1.8]万次的作品个数约为 $200\times0.8186\approx164$.

8. 0.304　甲队在每轮点球比赛获胜的概率为
$p_1=0.8\times(1-0.5)=0.4$，
甲队在每轮点球比赛平局的概率为
$p_2=0.8\times0.5+(1-0.8)\times(1-0.5)=0.5$.
由题可知最终甲队获胜，
则后三轮比赛只能有两种情况：
①甲获胜两轮，剩下一轮甲乙平局，
最终甲队获胜的概率为 $C_3^2 0.4^2\times0.5=0.24$；
②甲获胜三轮，
该情况下最终甲队获胜的概率为 $0.4^3=0.064$，
综上，甲队获胜的概率为 $0.24+0.064=0.304$.

9. 解：(1)由题意可知，
愿意缴纳个人养老金的市民占总人数的 70%，

参考答案

故 $8+22+m+50=200\times70\%$，

解得 $m=60$. ………………………………（3 分）

（2）由频数分布表及（1）可得愿意缴纳个人养老金且年龄在 $[30,50)$ 的市民人数为 $22+60=82$，

………………………………………………（4 分）

频率为 $\frac{82}{200}=0.41$.

由频率估计概率可得该市一位市民愿意缴纳个人养老金且年龄位于 $[30,50)$ 的概率为 0.41.

………………………………………………（6 分）

（3）由频数分布表及（1）可得愿意缴纳个人养老金且年龄在 $[40,60]$ 的市民人数为 $60+50=110$，

………………………………………………（8 分）

设愿意缴纳个人养老金为事件 A，

愿意缴纳个人养老金且年龄在 $[40,60]$ 为事件 AB，

则 $P(A)=\frac{7}{10}$，$P(AB)=\frac{11}{20}$，

故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{11}{14}$. ………………（10 分）

由频率估计概率可得在愿意缴纳个人养老金条件下，该市一位市民的年龄位于 $[40,60]$ 的概率为 $\frac{11}{14}$.

………………………………………………（12 分）

10. 解：（1）设该选手 5 次投掷投中 1 号、2 号、3 号“壶”及未投中的次数分别为 x,y,z,t，

则 $\begin{cases}x+y+z+t=5\\3x+4y+5z=17\\0\leqslant x,y,z,t\leqslant5\\x,y,z,t\in\mathbf{N}\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=4\\y=0\\z=1\\t=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=0\\t=0\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=2\\t=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=3\\z=1\\t=1\end{cases}$， ……（2 分）

所以该选手 5 次投掷“弓箭”不同情况的种数为

$C_5^4C_1^1+C_5^3C_2^2+C_5^1C_4^1C_3^2C_1^1+C_5^3C_2^1C_1^1=95$. ……（4 分）

（2）（i）设选手 A 选择 1 号、2 号、3 号“壶”作为投掷目标，

5 次投中次数分别为 X_1,X_2,X_3，

最终得分分别为 Y_1,Y_2,Y_3.

则 $X_1\sim B_1(5,0.7)$，

$X_2\sim B_2(5,0.5)$，

$X_3\sim B_3(5,0.3)$，

所以 $EY_1=E(3X_1)=3E(X_1)$

$=3\times5\times0.7=10.5$；………………（6 分）

$EY_2=E(4X_2)=4E(X_2)=4\times5\times0.5=10$；

$EY_3=E(5X_3)=5E(X_3)=5\times5\times0.3=7.5$.

因为 $EY_1>EY_2>EY_3$，

所以建议选手 A 选择 1 号“壶”进行投掷.

………………………………………………（8 分）

（ii）因为选手 B 最终累计得分为 23 分，

所以对选手 A 选择的方案分情况如下：

①5 次均投中 3 号“壶”，累计得分 25 分；

②4 次投中 3 号“壶”，1 次投中 2 号“壶”，

累计得分 24 分，才能赢得 B 选手. ……（10 分）

方案①：选手 A 最终获胜的概率为

$P=0.3^5=0.00243$；

方案②：选手 A 最终获胜的概率为

$P=C_5^4\,0.3^4\times0.5=0.02025$. ……………（12 分）

新角度

1. BD 由题意可得 R 函数即函数 $y=f(x)$ 至少存在两点，使得在这两点处的导数值相等，

［难点］切线平行即切线的斜率相等，根据导数的几何意义可得切点处的导数值相等.

A 项：因为 $f'(x)=2x+\cos x$，

$f''(x)=2-\sin x>0$ 恒成立，

所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $f(x)=x^2+\sin x$ 不是 R 函数，**A 错误；**

B 项：$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x\ln x+x$，

所以 $f''(x)=2\ln x+3$，$x>0$.

令 $f''(x)=0$，则 $x=e^{-\frac{3}{2}}$，

当 $x\in(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 时，$f'(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$f'(x)$ 单调递增.

且 $x=e^{-\frac{3}{2}}$ 是 $f'(x)$ 的极小值点，

所以 $f(x)=x^2\ln x$ 是 R 函数，**B 正确；**

C 项：$f'(x)=e^x-x^2$，$f(x)$，$f'(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，

$f''(x)=e^x-2x$，

易证 $f''(x)>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $f(x)=e^x-\frac{x^3}{3}$ 不是 R 函数，**C 错误；**

参考答案

D 项:$f'(x)=\frac{1}{e^{2x}}(-\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x)$

$=\frac{1}{e}(-\sin x-\cos x)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{e^x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

取 $x_1=-\frac{\pi}{4},x_2=\frac{3}{4}\pi$,

则 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$,

所以 $f(x)=\frac{\cos x}{e^x}$ 是 R 函数,**D 正确**.

2. AC **A 项**:由题意可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m-n+1}{n}$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}=$

$\frac{(m-n+1)}{n}\cdot\frac{(m-n+2)}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{m}{1}$,

即 $\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{m!}{n!\ (m-n)!}=C_m^n$.

[难点]分子 $m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)(m-n+1)=\left[\frac{1}{(m-n)\cdot\cdots\cdot2\times1}\right][m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)\cdot\cdots\cdot2\times1]=\frac{A_m^m}{A_{m-n}^{m-n}}=\frac{m!}{(m-n)!}$,分母 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\times1=n!$.

又 $a_1=1$,所以 $a_{n+1}=C_m^n$,

所以 $a_{m+1}=C_m^m=1$,**A 正确**;

B 项:由 A 项可得,$a_n=C_m^{n-1}$,

当 m 为奇数时,$(a_n)_{\max}=C_m^{\frac{m-1}{2}}=C_m^{\frac{m+1}{2}}$,

此时数列 $\{a_n\}$ 中有两项最大值,**B 错误**;

C 项:由 A 项可得,$a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=C_m^0+C_m^1+\cdots+C_m^m=2^m$,**C 正确**;

D 项:$a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^m a_{m+1}=C_m^0-C_m^1+C_m^2-\cdots+(-1)^m C_m^m$,

因为 $(x+1)^m=C_m^0x^m+C_m^1x^{m-1}+\cdots+C_m^mx^0$,

当 $x=-1$,m 为偶数时,

$C_m^0-C_m^1+C_m^2-\cdots+C_m^m=0$,

又奇数项之和等于偶数项之和,

所以 $a_1-a_2+\cdots+(-1)^m a_{m+1}=0$,**D 错误**.

3. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 因为 $|PA|+|PB|\geqslant2\sqrt{|PA|\cdot|PB|}$

$=2a\geqslant|AB|=2c$,

当且仅当 $|PA|=|PB|$ 时,等号成立,

因为曲线 R 与 y 轴有交点,所以等号成立,

[难点]因为点 A,B 在 x 轴上且关于 y 轴对称,当点 P 在 y 轴上时,$|PA|=|PB|$. 又点 P 在曲线 R 上,所以当曲线 R 与 y 轴有交点时等号成立.

所以 $a\geqslant c$①,

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,

所以当 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 时,

$|OP|=\frac{1}{2}|AB|=c$,

所以 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=c^2$,

联立 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{c^2-\frac{a^4}{4c^2}},\\y=\pm\frac{a^2}{2c},\end{cases}$

因为 $c^2-\frac{a^4}{4c^2}\geqslant0$,所以 $a\leqslant\sqrt{2}c$②,

因为曲线 R 与 y 轴有交点,

所以当 $x=0$ 时,等号成立.

所以由①②得 $\frac{c}{a}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

4. $\frac{400}{\pi}$ 如图,设圆环的圆心为 O,

外圆与右边的长方形交于点 A,B,且 $AB=a$,

则点 O 到 AB 的距离为 $d=\sqrt{2^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$,

设此球形礼盒的半径为 R,

则 $2\pi R=2\left(10+\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\right)$,

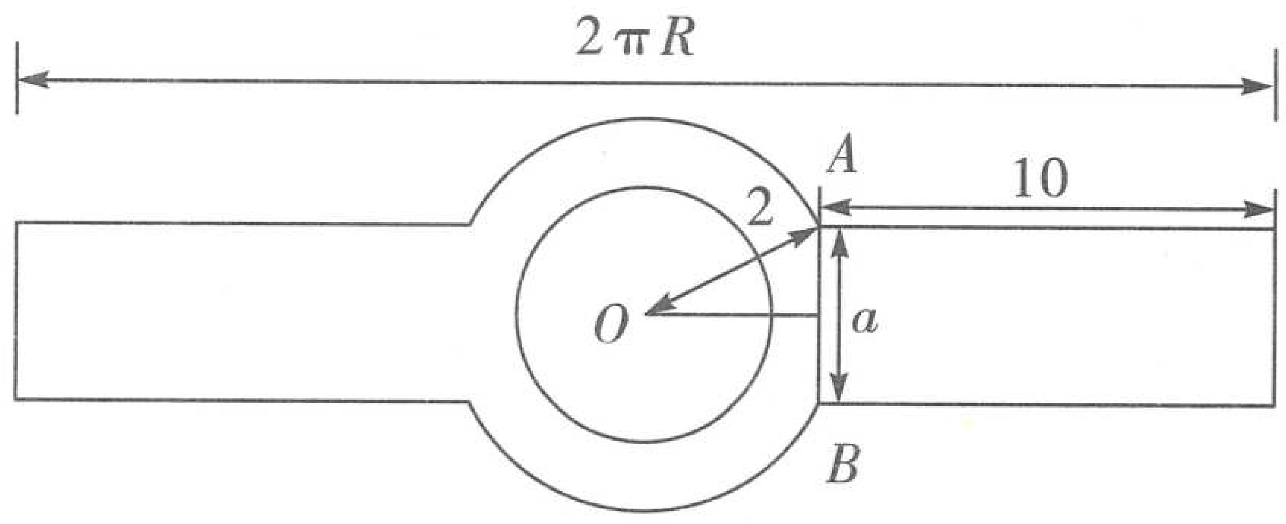
即 $R=\frac{1}{\pi}\left(10+\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\right)$,

所以此球形礼盒的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{4}{\pi}\left(10+\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\right)^2$,$a\in(0,4]$,

[易错]容易忽略 a 的取值范围.

则根据复合函数的单调性可知 $f(a)=\frac{4}{\pi}\left(10+\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\right)^2$ 在 $(0,4]$ 单调递减,

所以该球形礼盒的表面积的最小值为 $f(4)=\frac{4}{\pi}\left(10+\sqrt{4-\frac{4^2}{4}}\right)^2=\frac{400}{\pi}$.



第 4 题解图

5. 解:(1)由 $\sqrt{3}(c-a)=b(\sqrt{3}\cos A-\sin A)$ 及正弦定理,

得 $\sqrt{3}(\sin C-\sin A)=\sin B(\sqrt{3}\cos A-\sin A)$,

即 $\sqrt{3}\sin C-\sqrt{3}\sin A=\sqrt{3}\cos A\sin B-\sin A\sin B$.

又 $A+B=\pi-C$,

所以 $\sqrt{3}\sin(A+B)-\sqrt{3}\sin A=\sqrt{3}\cos A\sin B-\sin A\sin B$,

即 $\sqrt{3}\sin A\cos B-\sqrt{3}\sin A=-\sin A\sin B$. …… (2 分)

因为 $0<A<\pi$,所以 $\sin A\neq 0$,

故 $\sqrt{3}\cos B+\sin B=\sqrt{3}$,

即 $\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<B<\pi$,

所以 $-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,

故 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………… (4 分)

因为 $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MA}$,

所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$,

故 $|\overrightarrow{BM}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{BC}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{BA}|^2+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos B=\frac{1}{9}(a^2+4c^2+2ac)=\frac{28}{3}$,

即 $a^2+4c^2+2ac=84$①,

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-ac=12$②,

由①②得 $7(a^2+c^2-ac)=a^2+4c^2+2ac$,

即 $(2a-c)(a-c)=0$,

解得 $a=c$ 或 $2a=c$, ……………………………… (6 分)

当 $a=c$ 时,$a=c=b=2\sqrt{3}$,

所以△ABC 周长为 $a+c+b=6\sqrt{3}$,

当 $2a=c$ 时,由余弦定理可得 $a=2,c=4$,

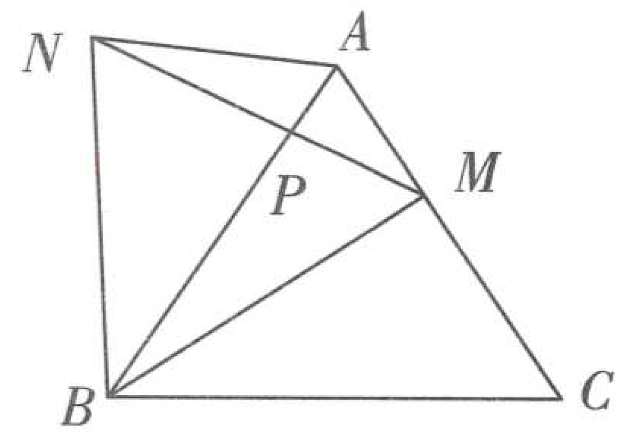
所以△ABC 周长为 $a+c+b=6+2\sqrt{3}$.

综上所述,△ABC 的周长为 $6\sqrt{3}$ 或 $6+2\sqrt{3}$. ……………………………………………… (8 分)

(2)因为△ABC 为锐角三角形,

所以由(1)可得 $a=c=b=2\sqrt{3}$,

如图,连接 AN,



第 5 题解图

易知 $\triangle BAN\cong\triangle BCM$,

所以 $AN=CM$,

所以 $\frac{PN}{PM}=\frac{S_{\triangle APN}}{S_{\triangle APM}}=\frac{S_{\triangle BPN}}{S_{\triangle BPM}}$, ………………… (10 分)

由比例性质得 $\frac{PN}{PM}=\frac{S_{\triangle APN}+S_{\triangle BPN}}{S_{\triangle APM}+S_{\triangle BPM}}=\frac{S_{\triangle BAN}}{S_{\triangle BAM}}$,

因为 $S_{\triangle BAN}=S_{\triangle BCM}$,

所以 $\frac{PN}{PM}=\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle BAM}}=\frac{CM}{AM}=2$. ………………… (12 分)

6. 解:(1)设 $P(x_0,y_0)$,$Q(x,y)$,

因为点 P 在抛物线 $x^2=2y$ 上,

所以 $x_0^2=2y_0$①. ……………………………… (2 分)

因为 $RP=PQ$,

所以 P 为 RQ 的中点,

即 $\begin{cases}x_0=\frac{x}{2},\\ y_0=\frac{y+1}{2},\end{cases}$ ② ……………………………… (4 分)

将②代入①中可得 C 的方程为 $y=\frac{x^2}{4}-1$. ………………………………………………… (5 分)

(2)由题可设直线 AD:$y=kx-1$,

联立 $\begin{cases}y=\frac{x^2}{4}-1,\\ y=kx-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4k,\\ y=4k^2-1,\end{cases}$

所以 $A(4k,4k^2-1)$,不妨设 $k>0$,如图,

$|AD|=\sqrt{16k^2+16k^4}=4k\sqrt{1+k^2}$. ………… (7 分)

因为直线 l 过原点,

所以 MN 为圆 O 的直径.

所以 $DM\perp DN$,即 $DA\perp DB$.

故 $|BD|=\sqrt{\frac{16}{k^2}+\frac{16}{k^4}}=\frac{4}{k}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$. …………… (9 分)

押题卷一手更新微信aa1ss33555
「一手更新微信aa1ss33555」
一手更新微信aa1ss33555
押题卷
aa1ss33555

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|BD|$

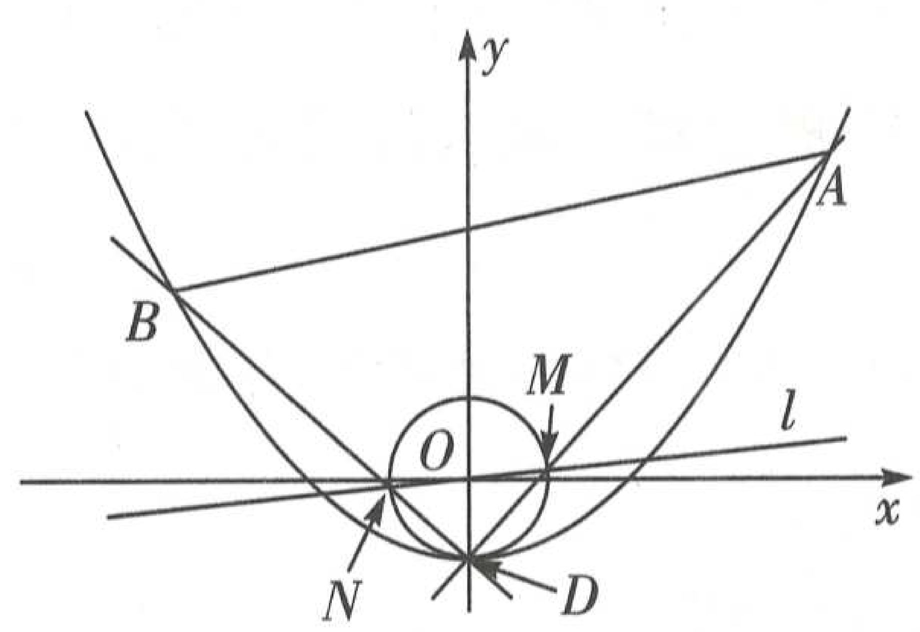
$=\frac{1}{2}\times 4k\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4}{k}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$=8\sqrt{(1+k^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$

$\geqslant 8\sqrt{2+2}=16.$ ……………… (11 分)

当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$,即 $k=1$ 时等号成立,

故$\triangle ABD$ 面积的最小值为 16. …………… (12 分)



第 6 题解图

7. 解:$f(x)=\boldsymbol{a}\Theta\boldsymbol{b}=\frac{m}{2}e^x-(1+x)(1-2x)$

$=\frac{m}{2}e^x+2x^2+x-1$, ………………… (2 分)

(1)当 $m=0$ 时, $f(x)=2x^2+x-1$,

令 $f(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{2}$, …………… (4 分)

所以当 $m=0$ 时, $f(x)$的零点为$-1,\frac{1}{2}$. … (5 分)

(2)函数$f(x)$有且仅有两个零点等价于方程$f(x)=0$有两个根,

即$\frac{m}{2}e^x=-2x^2-x+1$ 有两个根,

即 $m=\frac{-4x^2-2x+2}{e^x}$有两个根,

即函数 $y=m$ 的图象与函数 $h(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{e^x}$的图象有两个交点. ……………………………… (7 分)

则 $h'(x)=\frac{2(2x+1)(x-2)}{e^x}$,

所以 $h(x)$在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$,$(2,+\infty)$单调递增,

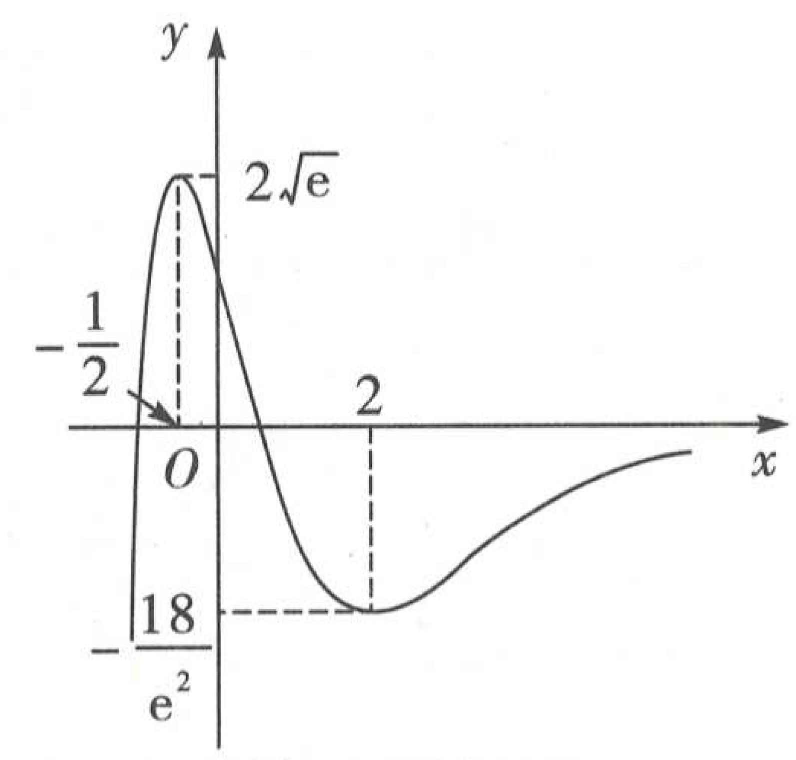
在区间$\left(-\frac{1}{2},2\right)$单调递减, ………………… (9 分)

当 $x\to+\infty$ 时,与二次函数相比,指数函数 $y=e^x$ 呈爆炸性增长,从而 $h(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{e^x}\to 0$;

当 $x\to-\infty$ 时,$h(x)\to-\infty$.

又 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$,$h(2)=-\frac{18}{e^2}$,

作出 $h(x)$图象如图所示, ……………… (11 分)



第 7 题解图

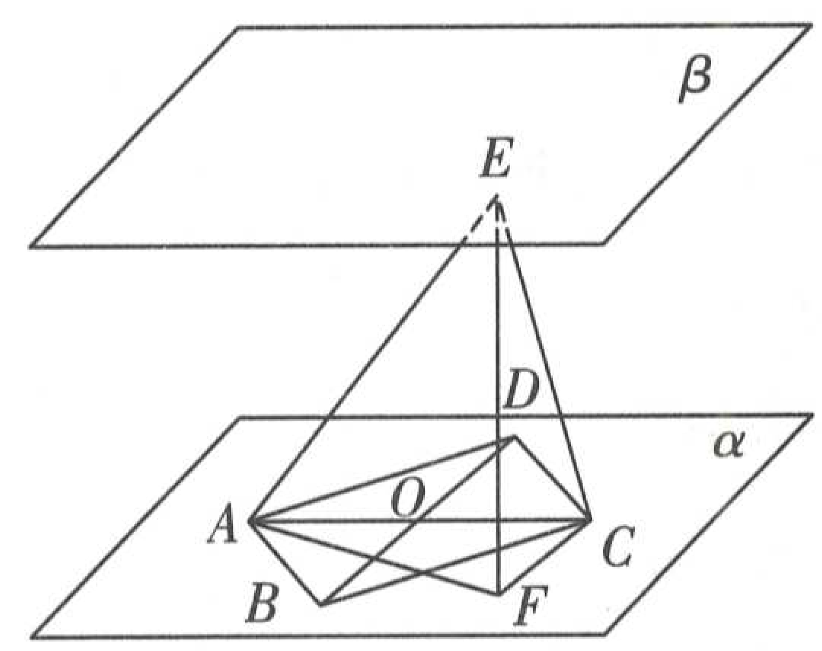
所以实数 m 的取值范围是$[0,2\sqrt{e})\cup\left\{-\frac{18}{e^2}\right\}$.

…………………………………………… (12 分)

8. 解:(1)如图①,连接 AC,BD,AE,CE,

设 AC,BD 的交点为 O,

点 E 在平面 α 内的射影为 F,连接 AF,CF,EF,



第 8 题解图①

因为点 E 在平面 α 内的射影为点 F,

所以 $EF\perp$平面 α,

所以 AE,CE 在平面 α 的射影分别为 AF,CF,

所以$\angle EAF=\theta$,$\angle ECF=\varphi$, ………………… (2 分)

所以$\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\varphi}=\frac{AF}{EF}+\frac{CF}{EF}=\frac{AF+CF}{3}=2$,

所以 $AF+CF=6>AC=2$,

所以点 F 的轨迹是以 A,C 为焦点,

长轴长为 6 的椭圆. ………………………… (4 分)

以 AC,BD 的交点 O 为坐标原点,

若以 AC 为 x 轴,BD 为 y 轴建立平面直角坐标系,

则点 F 的轨迹方程是$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

若以 BD 为 x 轴,AC 为 y 轴建立平面直角坐标系,

则点 F 的轨迹方程是$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$.(答案不唯一)

…………………………………………… (6 分)

(2)取 CE 的中点 M,连接 OM,则 $OM/\!/AE$,

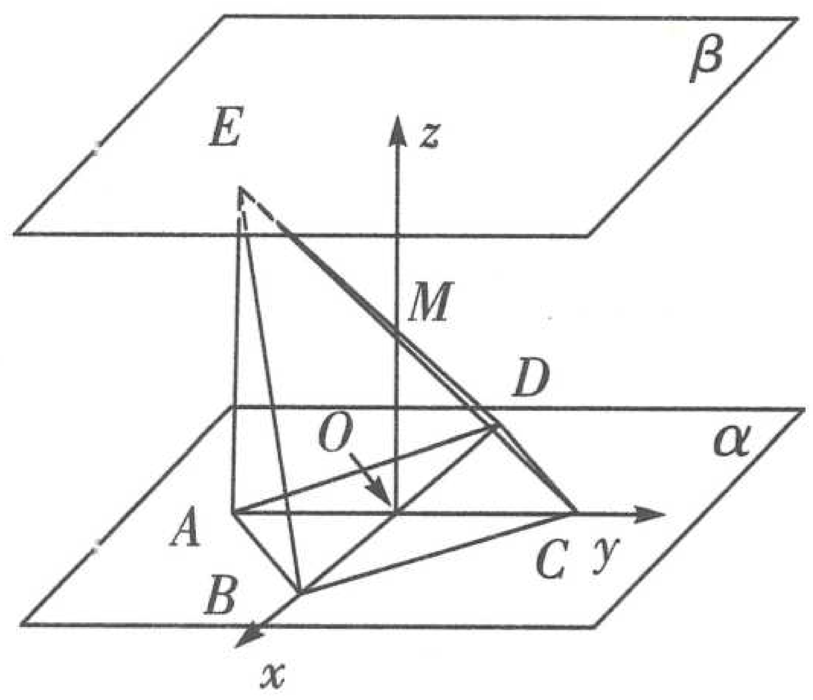
因为 $AE\perp$平面 α,所以 $OM\perp$平面 α,

所以 $OM\perp OB$,$OM\perp OC$,

因为平面 $ABCD$ 为菱形,所以 $OB\perp OC$,

所以 OB,OC,OM 两两互相垂直,

故以 O 为坐标原点，以 OB,OC,OM 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系 $Oxyz$. ……………………………………（7分）



第 8 题解图②

设 $OB=a,AE=b$，

则 $E(0,-1,b),B(a,0,0)$，

$C(0,1,0),D(-a,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{EB}=(a,1,-b)$，

$\overrightarrow{EC}=(0,2,-b)$，

$\overrightarrow{ED}=(-a,1,-b)$，

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}ax+y-bz=0,\\ -ax+y-bz=0,\end{cases}$

两式相减得 $2ax=0$，

即 $x=0$，则 $y-bz=0$，

令 $y=b$，得 $z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(0,b,1)$. ……………………………（9分）

设直线 CE 与平面 BDE 所成的角为 γ，

则 $\sin\gamma=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EC}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EC}|}\right|$

$=\left|\dfrac{2b-b}{\sqrt{b^2+1}\cdot\sqrt{4+(-b)^2}}\right|$

$=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}\cdot\sqrt{4+(-b)^2}}$，

所以 γ 只与 b 有关. ………………………（11分）

又 $\cos\angle BAD=2\cos^2\angle BAO-1=\dfrac{2}{a^2+1}-1=\dfrac{1-a^2}{a^2+1}$，

所以 $\angle BAD$ 只与 a 有关，

所以直线 CE 与平面 BDE 所成的角与 $\angle BAD$ 的大小无关. ……………………………………（12分）

新题型

1. 9（答案不唯一，满足 $M\in\{9,10,11,12\}$ 即可）

$f(x)=m\sin x+n\cos x=\sqrt{m^2+n^2}\sin(x+\varphi)$，

其中 $\tan\varphi=\dfrac{n}{m}$.

因为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=3$ 有交点，

与直线 $y=\dfrac{7}{2}$ 无交点，

所以 $3\leqslant\sqrt{m^2+n^2}<\dfrac{7}{2}$，

即 $9\leqslant m^2+n^2<\dfrac{49}{4}$.

又 $M\in\mathbf{N}^*$，所以 $M=9$ 或 10 或 11 或 12.

2. 6（答案不唯一，6 或 12 任写一个即可）

$(x^{-5}+x)^n$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_n^r(x^{-5})^{n-r}\cdot x^r$
$=C_n^r\cdot x^{6r-5n}$.

因为 $(x^{-5}+x)^n$ 的展开式中含有常数项，

所以 $\begin{cases}n\geqslant r,\\ 6r-5n=0,\end{cases}$

且 $r,n\in\mathbf{N}^*$ 有解，解得 $n=\dfrac{6}{5}r$.

[易错] 容易忽略 $r,n\in\mathbf{N}^*$ 而导致错解.

又 $n\leqslant12$，所以 $n=6$ 或 12.

3. (1,2)（答案不唯一，(1,2) 或 (2,1) 任写一个即可）

设该点为 (x_0,y_0)，

则 $\sqrt{(x_0+2)^2+(y_0+2)^2}-\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-2)^2}=4$，

即 $(x_0+2)^2+(y_0+2)^2=16+(x_0-2)^2+(y_0-2)^2+8\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-2)^2}$，

即 $x_0+y_0-2=\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-2)^2}$，

即 $(x_0+y_0-2)^2=(x_0-2)^2+(y_0-2)^2$ 且 $x_0+y_0\geqslant2$，

[易错] 容易忽略 $(x_0+y_0-2)^2\geqslant0$ 这一隐含条件，导致错解.

即 $x_0y_0=2$.

又 $x_0\in\mathbf{N}^*$，$y_0\in\mathbf{N}^*$，

所以该点为 (1,2) 或 (2,1).

4. 2;3（答案不唯一）

因为 $a_{n+1}-a_na_{n+1}-a_n=1$，

所以 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，

[难点] 对题设等式进行转化，将 a_n 与 a_{n+1} 分离，便于寻求项与项之间的关系.

$a_{n+2}=\dfrac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\dfrac{1+\dfrac{1+a_n}{1-a_n}}{1-\dfrac{1+a_n}{1-a_n}}=-\dfrac{1}{a_n}$，

故 $a_{n+4}=-\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+1}-1}{1+a_{n+1}}=\frac{\frac{1+a_n}{1-a_n}-1}{1+\frac{1+a_n}{1-a_n}}=a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是周期为 4 的周期数列.

若数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=2$,

则 $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+2}{1-2}=-3$,

$a_3=-\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{2}$,

$a_4=-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{3}$,

故 $a_1a_2a_3a_4=2\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=1$.

所以数列$\{a_n\}$的前 2023 项积为 $1^{505}\times2\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$.

5. 1$\left(答案不唯一,满足|\boldsymbol{c}|\in\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]即可\right)$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

不妨设 $\boldsymbol{a}=(1,0),\boldsymbol{b}=(0,1),\boldsymbol{c}=(x,y)$,

[难点]因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量,所以可设特殊值简化计算.

则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(1-x,-y),\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=(-2x,1-2y)$.

由$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\perp(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$可得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=0$,

即 $x^2+y^2-x-\frac{y}{2}=0$,

即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$,

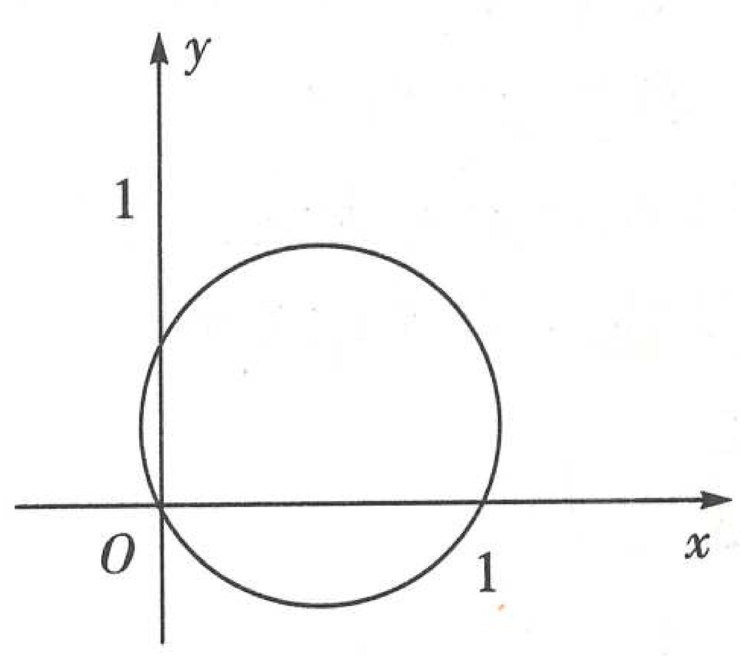
故 $\boldsymbol{c}$ 的起点为坐标原点 O,

终点在以$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$为圆心,半径 $r=\frac{\sqrt{5}}{4}$的圆上.

又$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$,

所以其为圆上任意一点(x,y)到原点 O 的距离,

所以结合图象可知$|\boldsymbol{c}|\in\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$,取$|\boldsymbol{c}|=1$.



第 5 题解图

6. ①③或①④

由 $\tan 2\theta>0$ 可得 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}>0$,

因为 θ 为锐角,所以 $\tan\theta>0$,

则 $1-\tan^2\theta>0$,解得 $0<\tan\theta<1$,

故 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,在①②中选择①;

③:$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$,

即 $\tan\theta=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$,

解得 $\tan\theta=\sqrt{2}-1$ 或$-\sqrt{2}-1$(舍去),

[易错]容易忽略 θ 为锐角,导致漏选③.

可得 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1>0$,满足题意;

④:由 $\tan\theta=\frac{2\cos\theta}{5+\sin\theta}$,可得 $\sin^2\theta+5\sin\theta=2\cos^2\theta$,

即 $3\sin^2\theta+5\sin\theta-2=0$,

解得 $\sin\theta=\frac{1}{3}$或-2(舍去),

故 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{7}>0$,满足题意;

⑤:由 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$,

可得 $\cos\theta-\sin\theta=-\frac{1}{5}$,

结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

解得$\begin{cases}\sin\theta=\frac{4}{5}或-\frac{3}{5}(舍去),\\ \cos\theta=\frac{3}{5}或-\frac{4}{5}(舍去),\end{cases}$

所以 $\tan\theta=\frac{4}{3}$,$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{24}{7}<0$,

不满足题意.

故满足题意的一组序号为①③或①④.

7. 解:(1)选择条件①②:

化简①式可得 $b^2+c^2-1=2bc\cos A$,

由余弦定理可得 $a=1$,

所以由②式可得 $b+c=2=2a$, ………………… (2 分)

由正弦定理可得 $\sin B+\sin C=2\sin A$,

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

参考答案

所以 $\sin C+\sin C\cos A=2\sin A-\sin A\cos C$.

………………………………………………… (4 分)

由正弦定理可得 $c(1+\cos A)=a(2-\cos C)$,

③式得证. ………………………………… (5 分)

选择条件①③:

化简①式可得 $b^2+c^2-1=2bc\cos A$,

由余弦定理可得 $a=1$. …………………… (2 分)

由③式及正弦定理可得,

$\sin C+\sin C\cos A=2\sin A-\sin A\cos C$,

即 $\sin B+\sin C=2\sin A$, …………………… (4 分)

由正弦定理可得 $b+c=2a=2$,

②式得证. ………………………………… (5 分)

选择条件②③:

由③式及正弦定理可得,

$\sin C+\sin C\cos A=2\sin A-\sin A\cos C$,

即 $\sin B+\sin C=2\sin A$,

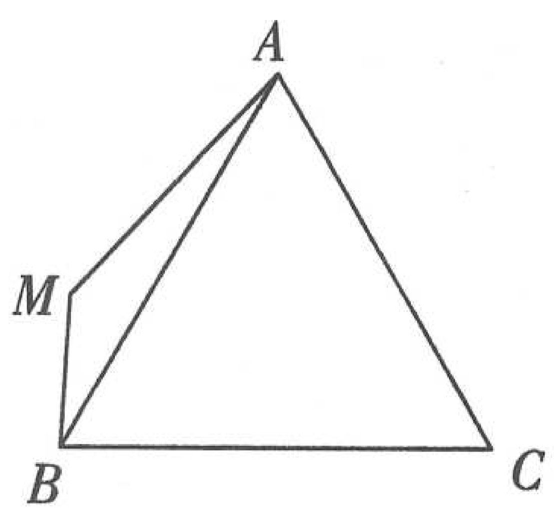
由正弦定理可得 $b+c=2a$, ……………… (2 分)

结合②式可得 $a=1$,

化简①式可得 $b^2+c^2-1=2bc\cos A$, ………… (4 分)

又 $a=1$,①式得证. ……………………… (5 分)

(2)如图所示,设 $\angle AMB=\theta$,



第 7 题解图

由余弦定理可得 $AB^2=MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos\theta$

$=5-4\cos\theta$, ………… (7 分)

因为 $S_{四边形MACB}=S_{\triangle AMB}+S_{\triangle ABC}$

$=\frac{1}{2}MA\cdot MB\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$

$=\sin\theta+\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\cos\theta$

$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$. ……… (9 分)

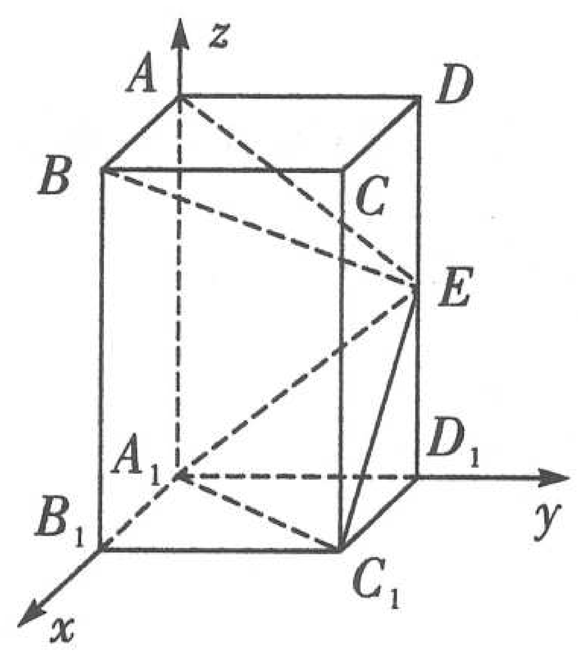
又 $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,

所以 $S_{四边形MACB}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$. ………………… (10 分)

8. 解:因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,

所以 A_1A,A_1B_1,A_1D_1 两两垂直,

故以 A_1 为坐标原点,A_1B_1,A_1D_1,A_1A 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 A_1xyz.



第 8 题解图

因为 $AB=AD=\frac{1}{2}AA_1=1$,

所以 $A(0,0,2),B(1,0,2),E(0,1,1)$,

$A_1(0,0,0),C_1(1,1,0)$.

则 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0),\overrightarrow{AE}=(0,1,-1)$,

$\overrightarrow{A_1C_1}=(1,1,0),\overrightarrow{A_1E}=(0,1,1)$. …………… (2 分)

(1)设平面 EAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1-z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$,则 $x_1=0,z_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$;

设平面 EA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+y_2=0,\\ y_2+z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$,则 $y_2=-1,z_2=1$,

得 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,1)$. ……………………… (5 分)

因为 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=0$,

所以 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,

故平面 $EAB\perp$ 平面 EA_1C_1. …………………… (6 分)

(2)取 BB_1 的中点 H,

由长方体的性质易得 $BH/\!/ED_1,BH=ED_1$,

所以四边形 BHD_1E 为平行四边形,$BE/\!/HD_1$,

因为 $\overrightarrow{EB}=(1,-1,1)=\boldsymbol{n}_2$,

所以 $BE\perp$ 平面 EA_1C_1,

所以 $HD_1\perp$ 平面 EA_1C_1,

即 $D_1F\perp$ 平面 EA_1C_1. ……………………… (8 分)

由 $\triangle EA_1C_1$ 是等边三角形,

易得三棱锥 D_1-A_1C_1E 为正三棱锥,

所以点 F 为等边 $\triangle EA_1C_1$ 的中心,

故 $F\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,

$\overrightarrow{FB}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$. ……………………… (9 分)

23年高考押题卷，一手更新微信aa1ss33555

选择结论①：

由(1)得平面 EA_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,1)$.

设直线 BF 与平面 EA_1C_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_2,\overrightarrow{FB}\rangle|$

$=\dfrac{|\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{FB}|}{|\boldsymbol{n}_2||\overrightarrow{FB}|}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$，…………… (11 分)

所以 BF 与平面 EA_1C_1 所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$.

………………………………………… (12 分)

选择结论②：

由(1)得平面 EAB 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$，

又 $\overrightarrow{FA}=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，

$\overrightarrow{FB}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，

设平面 FAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a+2b-5c=0,\\ 2a-2b+5c=0,\end{cases}$

令 $a=0$，得 $b=5,c=2$，则 $\boldsymbol{m}=(0,5,2)$. … (11 分)

设平面 FAB 与平面 EAB 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{m}\rangle|$

$=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{7\sqrt{58}}{58}$. …………… (12 分)

选择结论③：

因为点 F 在 $\triangle EA_1C_1$ 内，

所以平面 FA_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,1)$.

又 $\overrightarrow{FA}=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，

$\overrightarrow{FB}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$，

设平面 FAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a+2b-5c=0,\\ 2a-2b+5c=0,\end{cases}$

令 $a=0$，得 $b=5,c=2$，则 $\boldsymbol{m}=(0,5,2)$. … (11 分)

设二面角 AB-F-A_1C_1 为 θ，

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{m}\rangle|$

$=\dfrac{|\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}_2||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{87}}{29}$.

观察图形可得二面角 AB-F-A_1C_1 为钝二面角，

所以二面角 AB-F-A_1C_1 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{87}}{29}$.

………………………………………… (12 分)

9. 解：(1)**选择条件①：**

因为直线 l 关于原点对称，所以 $l_{AB}: y=x$.

联立$\begin{cases}y=x,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 可得 $13x^2-36=0$，………………… (2 分)

则 $x_1+x_2=0, x_1x_2=-\dfrac{36}{13}$.

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$，………

………………………………………………… (4 分)

故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+1^2}\times\dfrac{12\sqrt{13}}{13}=\dfrac{12\sqrt{26}}{13}$. ……… (5 分)

选择条件②：

因为直线 l 过点 $P(2,2)$ 及 $(1,0)$，

所以 $k_{PA}=\dfrac{2-0}{2-1}=2$，

则直线 l 的方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$.

联立$\begin{cases}y=2x-2,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去 y 可得 $5x^2-9x=0$. … (2 分)

则 $x_1+x_2=\dfrac{9}{5}$，$x_1x_2=0$.

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{9}{5}$，…… (4 分)

故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+2^2}\times\dfrac{9}{5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. ……………… (5 分)

(2)当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=2$，

将 $x=2$ 代入$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

解得 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. …………………………… (6 分)

令 $A\left(2,\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$B\left(2,-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，易知 $M(0,2)$，

则$\dfrac{1}{k_{MA}}+\dfrac{1}{k_{MB}}=\dfrac{0-2}{2-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}+\dfrac{0-2}{2+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}=-\dfrac{9}{2}$. ……… (8 分)

当直线 l 斜率存在时，易知其斜率不为 0，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)+2$，

联立$\begin{cases}y=k(x-2)+2,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 可得 $(4+9k^2)x^2-36k(k-1)x+36k^2-72k=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

参考答案

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{36k(k-1)}{4+9k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{36k^2-72k}{4+9k^2}, \end{cases}$ ………………………… (9 分)

故 $\dfrac{1}{k_{MA}}+\dfrac{1}{k_{MB}}=\dfrac{x_1}{y_1-2}+\dfrac{x_2}{y_2-2}$

$=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{x_1}{x_1-2}+\dfrac{x_2}{x_2-2}\right)$

$=\dfrac{1}{k}\left[\dfrac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right]$

$=\dfrac{1}{k}\left[\dfrac{72k^2-144k-72k^2+72k}{36k^2-72k-72k^2+72k+16+36k^2}\right]$

$=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{-72k}{16}=-\dfrac{9}{2}$. …………… (11 分)

综上所述，$\dfrac{1}{k_{MA}}+\dfrac{1}{k_{MB}}=-\dfrac{9}{2}$为定值. ………… (12 分)

10. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

不等式 $f(x)\leqslant x^2-x$ 等价于 $m\ln x-x+1\leqslant 0$，

令 $g(x)=m\ln x-x+1(x>0,m>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{m}{x}-1=\dfrac{m-x}{x}$.

当 $x\in(0,m)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

则 $g(x)_{\max}=g(m)=m\ln m-m+1$. ……… (3 分)

又 $\forall x>0$，$g(x)\leqslant 0$，

所以 $m\ln m-m+1\leqslant 0$，

即 $\ln m+\dfrac{1}{m}\leqslant 1$.

设 $h(m)=\ln m+\dfrac{1}{m}(m>0)$，

则 $h'(m)=\dfrac{m-1}{m^2}$，

所以 $h(m)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，

在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(m)\geqslant h(1)=1$. ………………………… (5 分)

综上所述，可得 $m=1$. ……………………… (6 分)

(2) 由 (1) 可知 $f(x)=x\ln x$，$x>0$.

直线 $y=ax+b$ 和曲线 $y=f(x)$ 的交点个数等于方程 $\dfrac{1}{x}[f(x)-ax-b]=0$ 的实根个数.

令 $F(x)=\ln x-a-\dfrac{b}{x}(x>0)$，

则 $F'(x)=\dfrac{x+b}{x^2}$. ……………………………… (7 分)

选择条件①：

因为 $b<0$，

所以 $F(x)$ 在区间 $(0,-b)$ 单调递减，

在区间 $(-b,+\infty)$ 单调递增.

因为 $F(-b)=\ln(-b)-a+1<-3+2+1=0$，

$F(1)=-a-b>0$. ……………………………… (8 分)

令 $\varphi(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}(0<x<1)$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2}<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

故 $2\ln x>x-\dfrac{1}{x}(0<x<1)$，

所以 $\ln x^2>x-\dfrac{1}{x}(0<x<1)$. ……………… (10 分)

则 $F(b^2)=\ln b^2-a-\dfrac{1}{b}$

$>b-\dfrac{1}{b}+0-\dfrac{1}{b}$

$=\dfrac{b^2-2}{b}>0$. ……………………… (11 分)

所以 $F(x)$ 在区间 $(b^2,-b)$ 和 $(-b,1)$ 内各有一个零点.

故直线 $y=ax+b$ 和曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 2.

……………………………………………… (12 分)

选择条件②：

因为 $b<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,-b)$ 单调递减，

在区间 $(-b,+\infty)$ 单调递增.

$F(-b)=\ln(-b)-a+1<3-4+1=0$.

$F(e^6)=6-a-\dfrac{b}{e^6}>6-6+\dfrac{1}{e^6}>0$. …………… (8 分)

令 $t(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}(x>0)$，

则 $t'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

所以 $t(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，

在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $t(x)\geqslant t(1)=0$，即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$. ……… (10 分)

则 $F\left(\dfrac{1+b}{1-a}\right)=\ln\dfrac{1+b}{1-a}-a-\dfrac{b(1-a)}{1+b}$

$>1-\dfrac{1-a}{1+b}-a-\dfrac{b(1-a)}{1+b}=0$. …… (11 分)

所以 $F(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1+b}{1-a},-b\right)$ 和 $(-b,e^6)$ 各有一个零点.

故直线 $y=ax+b$ 和曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 2.

……………………………………………… (12 分)

押题卷一手更新微信aa1ss33555
『一手更新微信 aa1ss33555』
一手更新微信 aa1ss33555
押题卷
aa1ss 33555