

理科数学

新素材

答案链接:P62

理科数学

考情解读

新素材通常出现在常用逻辑用语、排列组合、解析几何、立体几何、概率等考点中. 试题选取中华优秀传统文化、我国社会经济和科技发展与进步中取得的成就、生产生活实际、社会普遍关注的青少年相关问题等为素材,引导学生领略民族智慧,关注社会主义建设成果,激发青年学生树立为国家服务、奉献科技事业的信念,增强社会责任感、民族自信心和自豪感,形成正确的人生观、价值观、世界观. 考查学生观察问题、分析问题和解决问题的能力以及空间想象、运算求解、数据分析等能力,促使学生提高数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数据分析与数学运算的数学学科核心素养.

1. 结合《从军行》考查常用逻辑用语

唐代著名诗人王昌龄在《从军行》中写道“黄沙百战穿金甲,不破楼兰终不还”,这句诗表达了将士们誓死报国的豪情壮志及其赤诚的爱国热情. 他以此来表达对戍边将士的钦佩之情,诗句中“不破楼兰”是“不还”的

- A. 充分必要条件
- B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

2. 结合“图论”考查排列组合

图论作为数学领域的一个分支,解决了我国在生产实际中提出的“中国邮递员问题”,即:一个邮递员应该怎么选择一条线路,才能既把所有由他负责的物件都送到,又能使所走的路程最短. 如图所示,用每个点表示一个地区,两个点为端点的线段表示一条线路,若某快递员需要将 A, B 两种不同类型的物品配送到 10 个地区,1-5 地区需配送 A 类物品,6-10 地区需配送 B 类物品,要求先把一类物品配送完,才能配送另一类物品. 已知快递员可以从 10 个地区中的任意一个地区出发,则将 10 个地区的货物都配送完且所走线路最短的种数有

- A. 20 种
- B. 40 种
- C. 60 种
- D. 80 种

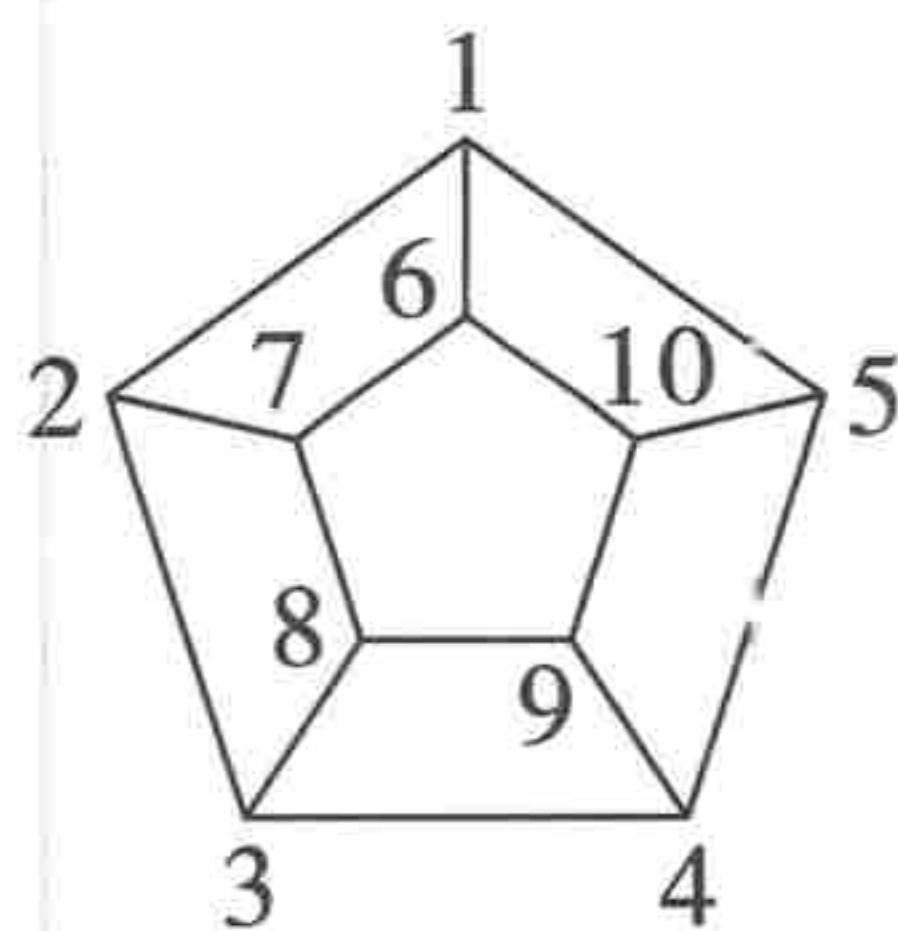
3. 结合博物馆收藏的“铜诏铁权”考查抛物线的应用 [素材来源:新华网]

如图所示为某博物馆收藏的铜诏铁权. 假设该铜诏铁权的直观图可近似看作抛物线 $x^2 = -2py (p > 0)$ 的一部分,已知直线 $y = kx + b$ (其中 $b < 0$) 与抛物线交于不同的两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 则

- A. $x_1 x_2 = -2pb$
- B. 若以线段 AB 为直径的圆经过原点,则此圆半径的最小值为 p
- C. 若以线段 AB 为直径的圆经过抛物线的焦点,且该圆的面积为 $16\pi p^2$,则圆心到

x 轴距离的最大值为 $\frac{8\sqrt{2}-1}{2}p$

- D. 分别过点 A, B 作抛物线的切线交于点 Q ,则 $\triangle ABQ$ 面积的最小值为 $-b\sqrt{-2pb}$



4. 结合《孙子算经》考查立体几何中体积问题

著名的数学著作《孙子算经》中有这样一道题“今有木，方三尺，高三尺，欲方五寸作枕一枚. 问：得几何？”意思是：“有一块棱长为3尺的正方体方木，要把它作成棱长为5寸的正方体枕头，可作多少个？”若现将此正方体方木，切割成由两个相等且底面重合的正四棱锥组成的八面体，棱锥底面与正方体的某一个面平行，八面体各顶点均在正方体的表面上，则该八面体体积的取值范围为_____.

5. 结合世界杯的比赛规则考查相互独立事件概率[素材来源：新华网]

随着阿根廷队夺冠，2022年卡塔尔足球世界杯落下帷幕. 根据足球比赛规则，两支足球队先进行90分钟常规赛. 若比分相同，则进行30分钟加时赛；如果在加时赛比分依旧相同，则进入5球点球大赛. 若甲、乙两队在常规赛与加时赛中得分均相同，则甲、乙两队轮流进行5轮点球射门，进球得1分，不进球不得分. 假设甲队每次进球的概率均为0.8，乙队每次进球的概率均为0.5，且在前两次点球中，乙队领先一球，已知每轮点球大赛结果相互独立，则最终甲队获胜的概率为_____.

6. 结合科技改革的投入资金情况考查线性回归

(12分)为响应党的二十大中提出的科技是第一生产力，某企业持续推进科技改革并大力投入资金，为祖国现代化建设贡献力量. 现统计了该企业近几年的科技改革投入资金，如下表所示.

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年份编号 x	1	2	3	4	5	6
投入资金 y (万)	18	31	24	29	34	38

并计算得 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 666$, $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 57$.

(1)根据上表数据，求该企业年份编号 x 与科技改革投入资金 y 的相关系数 r (计算结果精确到0.01)；

(2)求出年份编号 x 与科技改革投入资金 y 的回归方程，并估计2023年的科技改革投入资金(计算结果精确到0.01)；

(3)根据第(2)问求出的回归方程，请你谈谈对未来五年该企业科技改革投入资金增长趋势的看法.(言之有理即可得分)

附：相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\sqrt{70} \approx 8.37$.

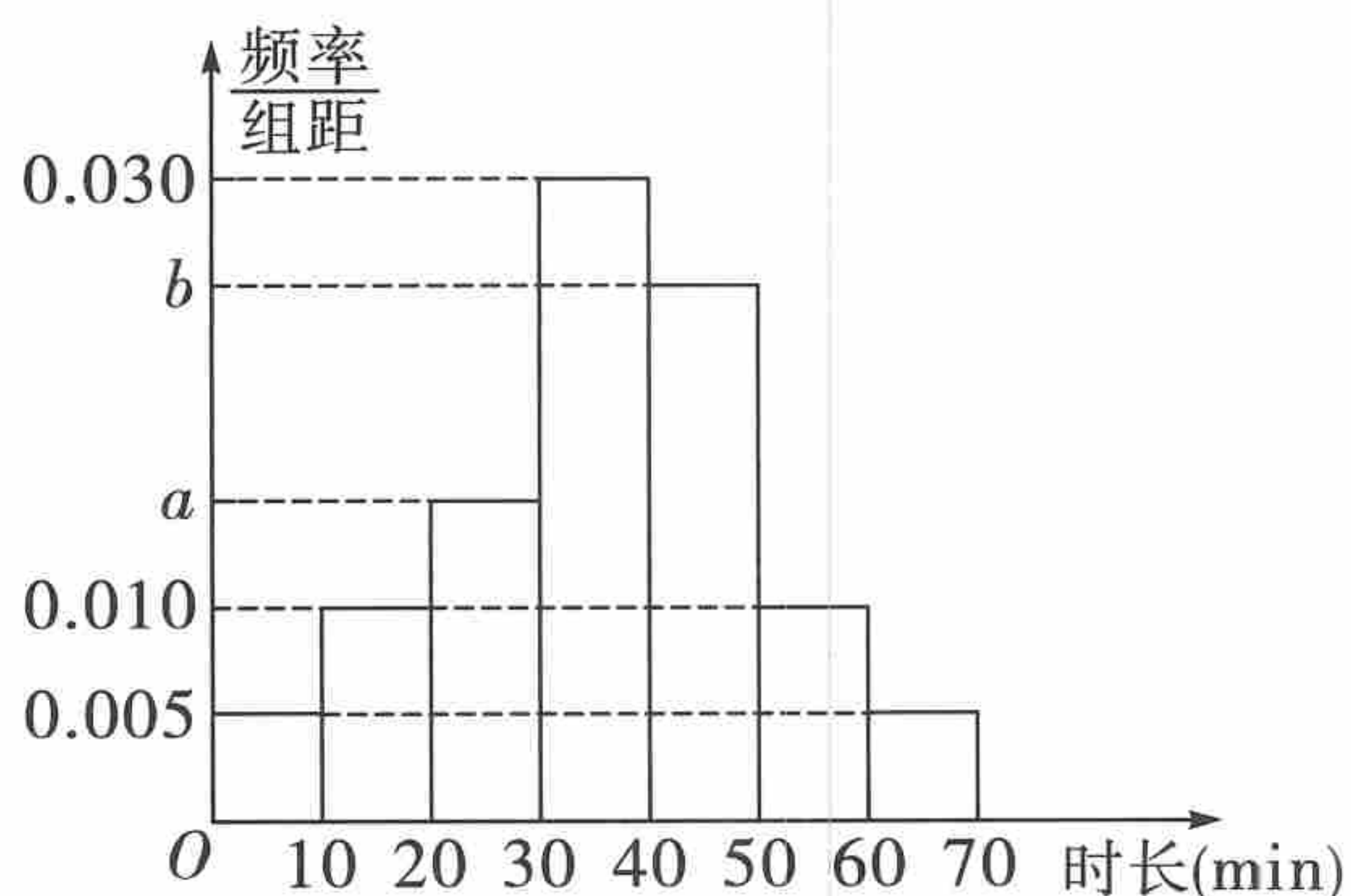
7. 结合世界杯的成功举办考查概率

(12分)第二十二届世界杯足球赛在卡塔尔成功举办,这是一场备受瞩目的足球盛宴.世界杯的举办极大地激发了人们对足球的热情,某地体育局为解决足球场地匮乏的问题,现计划建造一些足球场地,现从全市抽取 1000 名足球爱好者进行调查,统计他们每天的足球相关的锻炼时长,统计结果绘制成如下的频率分布直方图.已知锻炼时长在 $[20,30)$ 的人数是锻炼时长在 $[40,50)$ 的人数的 $\frac{3}{5}$ 倍.

理科数学

(1)为了解这些足球爱好者的锻炼内容,用分层抽样的方法从锻炼时长在 $[20,30)$ 和 $[30,40)$ 的居民中抽取 6 人了解情况,并计划从这 6 人中随机抽取 3 人参与抽奖活动,用 X 表示抽取的是锻炼时长在 $[20,30)$ 的人数,求 X 的分布列及数学期望;

(2)为丰富居民的周末娱乐生活,体育局计划举行趣味足球比赛,规则如下:两支球队进行比赛,共三局,采取积分制,每赢一局计 1 分,输一局不得分(假设不存在平局情况).设甲队每局获胜的概率为 $p(0 < p < 1)$,甲队打完三局比赛后最终得分为 2 分的概率为 $f(p)$,求 p 为何值时, $f(p)$ 取得最大值?



新角度

答案链接:P63

考情解读

新角度通常出现在数列、解析几何、立体几何等考点中,有新定义、新交汇、新载体、新设问四种类型.新角度试题中,新定义常会引入新的概念或形式,通过“现学现用”的方式考查学生的学习理解与应用能力;新交汇常会将各考点的考向综合考查,旨在引导学生发散思维;新载体常会利用考点下没有考查过的元素,如立体几何的图形、解析几何的曲线类型、函数与导数的函数类型等进行命题;新设问基本会结合考点下的常考知识点进行设问上的创新.新角度主要考查运算求解能力、推理论证能力、空间想象能力及创新意识,数形结合思想、化归与转化思想,数学运算、直观想象、逻辑推理的数学核心素养. 23年高考押题卷,一手更新微信aalss33555

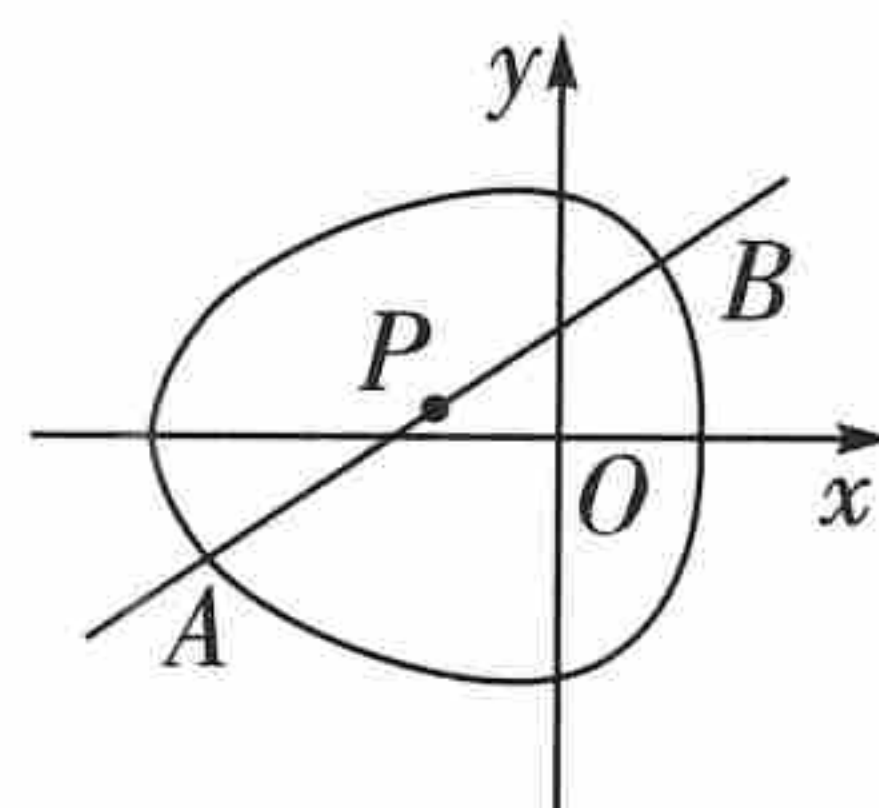
1. 以半椭圆的面积、对称轴为设问考查椭圆的性质

某社区计划将小区内一草坪修建翻新,此草坪可近似看作由半椭圆 $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (x \leq 0)$ 和半椭圆

$C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (x > 0)$ 围成的区域,记此草坪的外围曲线为 E ,如图所示,斜率为 k 的直线 l 与曲线 E 交

于 A, B 两点, P 为线段 AB 的中点,则

- A. 曲线 E 所围成的面积大于 36
- B. 直线 l 与曲线 E 的对称轴至多有 2 个交点
- C. C_1 的焦点到 C_2 的焦点的距离为 $\sqrt{3}$
- D. 存在 $k \in \mathbf{R}$,使得点 P 的轨迹在某个椭圆上



2. 以圆台为载体考查体积问题

已知一圆台的上、下底面半径分别为 1 和 2,母线长为 3,则当位于该圆台内且与圆台同轴(两个旋转体的轴线位于同一条直线上)的圆柱体积最大时,其高为

- A. $\sqrt{2}$
- B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
- C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- D. $2\sqrt{2}$

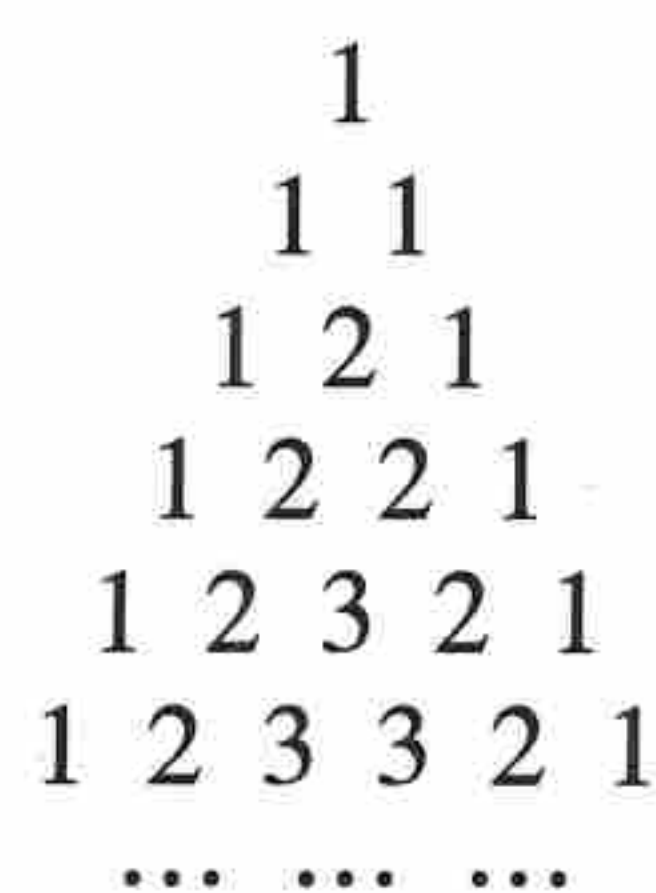
3. 结合 n 项对称数列考查数列的前 n 项和

(12 分)若项数为 n 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i = a_{n+1-i} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$,则称数列 $\{a_n\}$ 为“ n 项对称数列”.

如图是一张三角形数表,其第 n 行称为“ n 项对称数列”,记该三角形数表中“ n 项对称数列”的和为 b_n .

(1)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{6}{5}$,求 m 的值.



4. 以不等式证明为设问考查数列的前 n 项和

(12分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 均满足 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2n-3} + \frac{a_n}{2n-1} = \frac{a_{n+1}-1}{2}$, 记数

列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $b_1=a_1$, $b_2=a_2-1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\ln b_n + \ln b_{n+2} = 2\ln b_{n+1}$, 证明: $T_n \cdot T_{n+2} < T_{n+1}^2$.

5. 以双曲线为载体考查动点问题

(12分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 e , 且 a, e 为函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的零点, 点

A, B 分别为 C 的左、右顶点, 直线 l 与 C 交于 P, Q 两点(异于点 A, B).

(1) 判断直线 QA, QB 斜率之积是否为定值, 若是, 请求出定值; 若不是, 请说明理由;

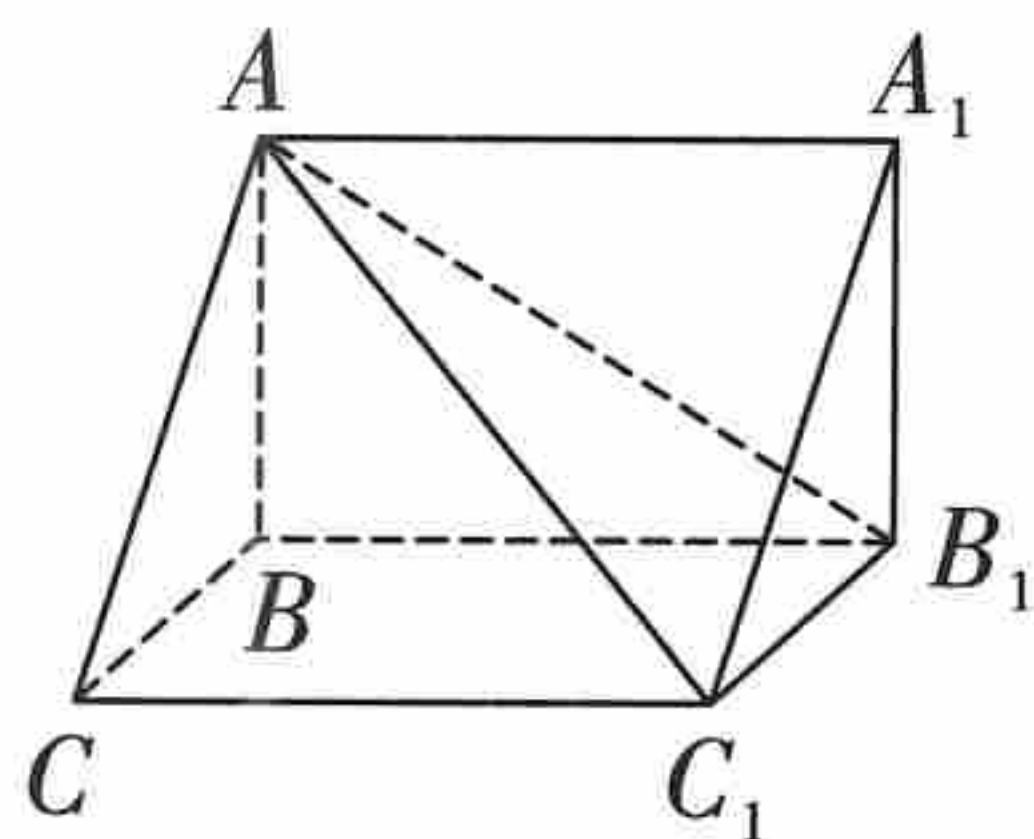
(2) 若直线 l 斜率存在, 点 P, S 关于坐标原点对称, 且直线 AS 交 BQ 于点 T , 直线 OT 交 PQ 于点 R , 证明: 点 R 在直线 $x=-1$ 上.

6. 以证明角的余弦值关系为设问考查线线、线面角

(12分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 底面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$.

(1) 记 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 α , AC_1 与 BB_1 所成角为 β , AA_1 与 BC_1 所成角为 γ , 证明: $\cos \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$;

(2) 设 $AB = BC = CC_1 = 2$, 点 P 在 AC_1 上, 试求点 P 到直线 BC 的距离的最小值.

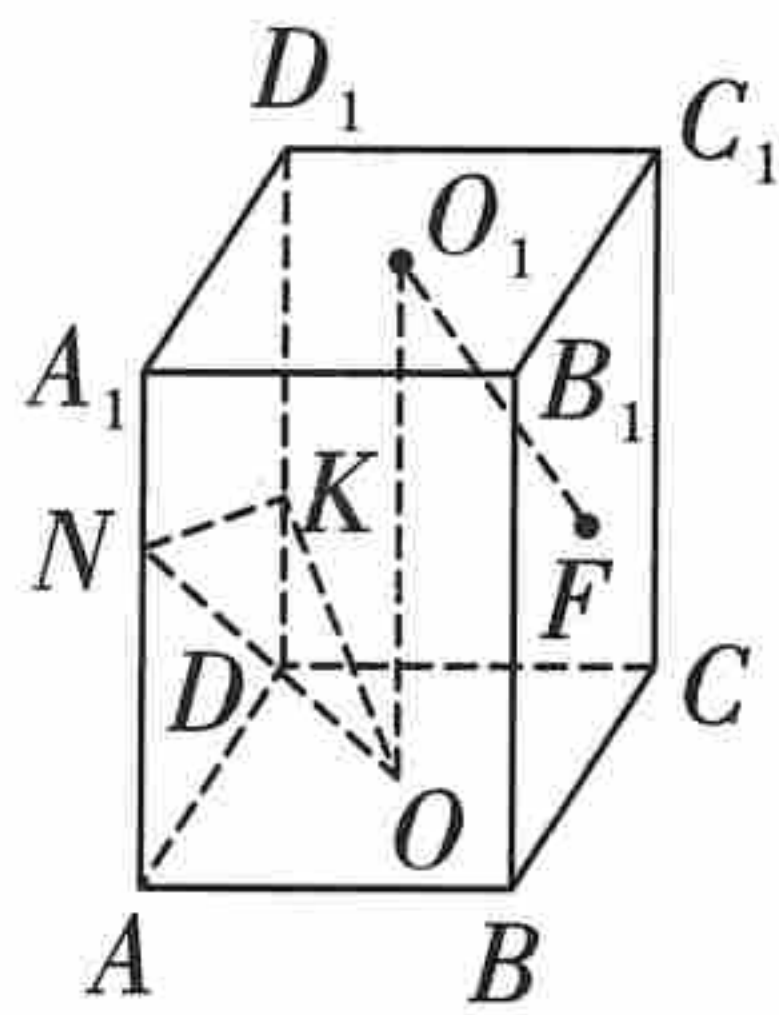


7. 以线面夹角的正弦值最大时的参数值为设问考查线面角问题

(12分) 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O, O_1, F 分别为底面 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ 及侧面 B_1C_1CB 的中心, 点 N, K 满足 $AN = \frac{2}{3}AA_1, DK = \frac{1}{3}DD_1$.

(1) 求证: 直线 $O_1F \parallel$ 平面 NKO ;

(2) 若 $AB = 8, AA_1 = 12, I$ 为 OO_1 上一点且 $OI = \lambda OO_1 (\lambda \neq 0)$, 求直线 O_1F 与平面 INK 所成角的正弦值最大时 λ 的值.



8. 以函数结合数列为载体考查证明不等式问题

(12分) 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 满足下列三个条件: ① $f(0) = 2$; ② $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(1-x)$ 成立;

③ $\frac{b}{2}$ 为 a, c 的等差中项. 23年高考押题卷, 一手更新微信aa1ss33555

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$, 证明: $f(x) < 2e^x(\sin x + \cos x)$.

9. 以函数结合立体几何为载体考查体积问题

(12分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{k}{x}$.

(1) 若 $f(x) \geq 2$ 恒成立, 求 k 的取值范围;

(2) 若点 $(x_1, 2), (x_2, 2)$ ($x_1 \neq x_2$) 为函数 $f(x)$ 图象上的两个点, 证明: $\sqrt{x_1 x_2} > k$;

(3) 已知方程 $f'(x) = k$ 有两个不同的正解 m, n , 且 $A(m, 0), B(n, 0)$, 求以 $|f'(m)|$ 为底面圆的半径且母线长为 AB 的圆柱体积的最大值.

新题型

答案链接: P68

考情解读

新题型通常有结构不良和结论开放两种类型,其中结构不良题是通过不完整的题目条件或不明确的题目条件、目标设置情境,不同的选择可能导致不同的结论,难度与用时也有区别;结论开放题指的是通过增加答案的开放性、思路的灵活性及试题情境的探究性来设置的题目.新题型具有很好的开放性,改变相对固化的试题形式,增强试题开放性,减少死记硬背和“机械刷题”现象且考查运算求解能力、推理论证能力、应用意识及创新意识,数形结合思想、化归与转化思想,数学运算、逻辑推理的数学核心素养.

1. 结构不良·函数基本性质

把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题:

若函数 $f(x) = \frac{1}{3}e^{x-2}$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 _____ 对称,则函数 $g(x) =$ _____.

注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形.

2. 结构不良·等比数列中最值问题

已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,前 n 项积为 T_n . 有以下命题:

- ①不存在 $q \geq 1$, T_n 有最大值;
- ②任意 $q < -1$, T_n 没有最大值;
- ③任意 $-1 < q < 0$, T_n 没有最大值;
- ④存在 $0 < q < 1$, T_n 有最大值.

其中一个假命题的序号是 _____. 因为当 $a_n =$ _____ 时,该命题的结论不成立.

3. 结论开放·不等式中满足等式及表达式最值的正实数对不唯一

若正实数 x, y, m, n 满足 $2x + y = 1$, 且 $\frac{2m^2}{x} + \frac{n^2}{y}$ 的最小值为 100, 则满足条件的一组正实数对 (m, n) 为 _____.

4. 结论开放·数列中通项公式不唯一

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: ① $a_n > 0$; ② $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1}$; ③ 当且仅当 $n = 8$ 时, $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 取得最大值,

写出一个同时满足上述 3 个条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

5. 结论开放·三角函数中满足不等式的参数值不唯一

写出满足不等式 $e^x + e^{-x} \leq \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - \frac{\pi}{6})} + \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \frac{\pi}{6})} \leq 2 \cos \frac{\pi x}{2}$ 的 θ 的一个值 _____.

6. 结论开放·解析几何中双曲线的方程不唯一

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过左焦点 F_1 作倾斜角为 30° 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 M, N 两点, 且 $|MF_2| = |NF_2|$, 则双曲线 C 的一个标准方程为 _____.

7. 结构不良·解三角形中边的最值问题

(12分)在① $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin(A+C)$;② $(\tan C-\sqrt{3})b^2=(\tan C+\sqrt{3})(c^2-a^2)$;

③ $\frac{a}{\cos(B+C)\cos\frac{5\pi}{6}}=\frac{c}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$ 这三个条件中任选一个,补充在下面的横线上,并解答.

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且_____.

(1)求 A ;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$,求 AD 的最小值.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

8. 结构不良·立体几何中的线面角问题

(12分)如图,在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $BCEF$ 与棱 PD, PA 分别交于异于顶点的两点 E, F .

(1)证明:四边形 $ADEF$ 为梯形;

(2)若 $AD=AP=4PF=4$, $BA=BP=\sqrt{13}$,从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个条件作为已知,求直线 AB 与平面 $BCEF$ 所成角的正弦值.

条件①:二面角 $B-AF-E$ 为 90° ;

条件②: $PD=4$;

条件③: $\cos\angle DAB=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

